

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México. México. No. 9. Julio-Diciembre 2023

OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **Los Grupos nilpotentes basados en las Series Centrales inferiores y superiores.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia.
- **Teorema J2: algoritmo para solucionar ecuaciones cuárticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a partir de una resolvente cúbica.**
Jaime William Flores Tecalco.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Programación y diseño de un modelo matemático de predictibilidad de manchas solares basado en machine learning mediante estacionalidad en series de tiempo ARIMA.**
Marcos Fajardo Rendón.
- **Propuestas matemáticas para economía, educación y seguridad ciudadana: Enfoque global.**
Fernando Gustavo Isa Massa.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Areli Guadalupe Mateos Sánchez.

COMITÉ CIENTÍFICO

<i>Caballero Mora Karen Salomé.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas
<i>Guzmán Sánchez Sergio.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Isa Massa Fernando Gustavo.</i>	Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Tucumán. Argentina.
<i>Juárez Contreras Socorro.</i>	Instituto Politécnico Nacional. Dirección General.
<i>Mendoza Pérez Armando Felipe.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Sentiés Nacaspac María de Jesús.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Salazar Peña Enrique.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster

Marcos Fajardo Rendón

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 9, Julio-Diciembre 2023 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx, revistajoom@gmail.com.
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-021112015700-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 28 de Julio de 2023.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 9.

Julio-Diciembre de 2023

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* número 9, julio-diciembre de 2023, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
-------------------------	----------

OBJETOS MATEMÁTICOS

Los Grupos nilpotentes basados en las Series Centrales inferiores y superiores.	20
<i>Nilpotent Groups based on the lower and upper Central Series.</i>	
<i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	

Teorema J2: algoritmo para solucionar ecuaciones cuárticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a partir de una resolvente cúbica.	24
<i>Theorem J2: algorithm for solving quartic equations with $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ roots from a cubic solver .</i>	
<i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Programación y diseño de un modelo matemático de predictibilidad de manchas solares basado en machine learning mediante estacionalidad en series de tiempo ARIMA.	28
<i>Programming and design of a mathematical model of sunspot predictability based on machine learning through seasonality in ARIMA time series..</i>	
<i>Marcos Fajardo Rendón.</i>	

Propuestas matemáticas para economía, educación y seguridad ciudadana: Enfoque global.	37
<i>Mathematical proposals for economics, education and public safety: A global approach.</i>	
<i>Fernando Gustavo Isa Massa.</i>	

CARTA DEL EDITOR

Para cierre de este año 2023 presentamos solo algunas publicaciones que se realizaron en años con secuencia calendárica idéntica a este año, como fueron los años 1854, 1905, 1967, 1972 (a partir del 1 de marzo) y 1978.

En 1854 la editorial A. S. Barnes & Co., de la Ciudad de Nueva York publicó la traducción de la Geometría de Adrien-Marie Legendre. Se tituló Elementos de Geometría y Trigonometría a cargo de Charles Davies y cuyo propósito fue adaptarla como una obra de apoyo para la instrucción matemática en Estados Unidos. Esta edición se basó y guió en el tratado original mencionado, sin embargo muchos de los argumentos y demostraciones difieren esencialmente del original, inclusive de la traducción hecha por el Dr. Brewster y así adaptar el conocimiento a una época en la que el lenguaje matemático se ha transformado y ya difiere del utilizado en las obras anteriores. Una de las aportaciones hechas por el traductor de la obra es la generalización utilizada para enunciar las proposiciones y el uso de diagramas muy específicos en las demostraciones hechas, con la idea de que las proposiciones geométricas son verdades establecidas y por tanto se deben generalizar pues con base en la experiencia de Davis el uso de diagramas particulares facilita la comprensión de proposiciones abstractas en los estudiantes principiantes y como consecuencia facilita la labor intelectual del proceso de abstracción de ideas matemáticas. Se puntualiza en este texto al círculo como el límite de polígonos inscritos y circunscritos. Con relación al contenido de Trigonometría Plana y Esférica también se han tratado de forma bastante diferente del utilizado en la obra original al separar específicamente el estudio de cálculo de lados y ángulos en los triángulos del estudio de la trigonometría analítica lo que se espera sea una mejora importante. Se hacía notar el estudio necesario de logaritmos para el mejor aprovechamiento de los conocimientos trigonométricos. La parte 1, dedicada el estudio de la geometría consta de una introducción, nueve capítulos llamados libros y un apéndice. En la introducción se presenta un conjunto de nociones importantes previas que facilitan la comprensión del lenguaje utilizado en la obra. En el Libro I se incluyen proposiciones y definiciones básicas; en el Libro 2 se enuncian las razones y las proporciones; Libro 3 incluye el estudio del Círculo y la medida de ángulos además de un compendio de problemas de lo estudiado anteriormente; el Libro 4 trata sobre las Proporciones de Figuras y la medida de Áreas incluyendo su conjunto de problemas; el Libro 5 versa sobre los Polígonos Regulares y la Medida del Círculo, el Libro 6 contiene proposiciones relativas a los ángulos planos y poliédricos; el Libro 7 estudia a los Poliedros; el Libro 8 enuncia las proposiciones relativas a los Tres Cuerpos Redondos y el Libro 9 trata la Geometría Esférica. El Apéndice aborda el estudio de los Poliedros Regulares y la Aplicación del Álgebra a la solución de problemas Geométricos (que se vuelve más utilizada en el estudio de la Geometría). La Parte 2 de esta obra incluye el estudio de la Trigonometría Plana con el uso de los logaritmos ; Trigonometría Analítica en el Plano en los que ya es utilizado el objeto matemático denominado Función Circular; Trigonometría Esférica con base en las Analogías de Napier, las partes Circulares de Napier, y el uso de logaritmos; Medida de Superficies (cuadriláteros, triángulos, polígonos irregulares, polígonos regulares, longitud de arco, área de un círculo, área de sector circular,

área de anillo circular, etc.); Medida de Sólidos que incluye conceptos como unidad de solidez y aborda temas como: superficie convexa de una parte o pieza de una Pirámide Recta; porciones de un sólido geométrico; solidez de un prismoide rectangular; estudio del cilindro, cono, la esfera, triángulo y polígono esféricos, un método para encontrar el ángulo localizado entre dos lados adyacentes de un poliedro regular, etc. Cabe mencionar que la expresión general de este método es: $\text{sen} \frac{1}{2} A = \frac{(\cos 360^\circ)(2n)^{-1}}{(\text{sen } 360^\circ)(2m)^{-1}}$, expresión que permite demostrar que el ángulo diédrico formado en dos caras adyacentes de los sólidos siguientes es:

Tetraedro	70°31'42"
Hexaedro	90°
Octaedro	109°28'18"
Dodecaedro	116°33'54"
Icosaedro	138°11'23"

Cabe hacer mención que estos brillantes trabajos realizados por A. M. Legendre, Brewster, Davis y otros se van uniendo poco a poco a lo realizado por los investigadores como Lamé, Plücker, F. Klein, R. F. A. Clebsch, Sophus Lie, entre otros y que abordaron la aritmetización de las ideas geométricas hasta llegar a una generalización de este proceso. Inclusive el mismo Auguste Comte es impresionado con estas ideas (de acuerdo con Carl Boyer en su texto Historia de la Geometría Analítica, publicado por editorial Dover) y las relaciona con la filosofía positivista; él mismo categorizó al análisis únicamente como matemática abstracta; a la geometría pura y la mecánica encabezando a la matemática concreta y llamó geometría analítica al paso más decisivo en la educación matemática. Sin embargo más que relacionarse con el análisis mismo, se relaciona con las técnicas algebraicas como una generalización de esta aritmetización mencionada por lo que debería de retomarse el nombre actual de este objeto matemático llamada Geometría Analítica como Geometría Algebraica o Álgebra Geométrica en un contexto más moderno e incluirse en el estudio de estos objetos matemáticos ya existentes.

En 1905 Albert Einstein publica cinco artículos cuya trascendencia es muy conocida en el mundo académico internacional. La recopilación de estos documentos se debe al trabajo de John Stachel quien funge como editor de la obra titulada “Einstein 1905. Un Año Milagroso. Cinco artículos que cambiaron la física”, a cargo de la editorial Crítica en Barcelona, España y formando parte de la colección Drakontos Bolsillo y publicada con motivo del centenario de estos artículos científicos en 2001 y posteriormente en 2011, como traducción del original publicado en 1998 por la editorial Princeton University Press.

El primer artículo incluido es la Tesis Doctoral de Einstein titulada “Una Nueva determinación de las dimensiones Moleculares”. La versión definitiva la concluye el domingo 30 de abril de 1905. Consta de cinco partes. La primera se denomina “Cómo influye una esfera muy pequeña suspendida en un líquido en movimiento”. En esta parte se analizan las funciones de las coordenadas espaciales tridimensionales y el tiempo, cada dimensión espacial se escribe como la diferencia con un punto inicial para desarrollarlas en series de Taylor; existe una región G como un entorno; entonces, el movimiento del líquido dentro de G se considera como una superposición de tres movimientos: a) desplazamiento paralelo de

todas las partículas del líquido y que no cambian posiciones; b) rotación de líquido sin que cambien las posiciones relativas de las partículas del líquido; c) movimiento de dilatación en tres dimensiones mutuamente perpendiculares, para proceder a un estudio analítico muy interesante relativo a la forma en que la esfera afecta al movimiento del líquido. La segunda parte se denomina: “Cálculo del Coeficiente de Viscosidad de un líquido en el que están suspendidas esferas pequeñas muy irregularmente distribuidas”. Para esta parte, se inicia con la suposición de que la región G contiene gran cantidad de esferas de radio R aleatoriamente distribuidas; dicho radio es extremadamente pequeño, tanto que el volumen conjunto de todas las esferas es muy pequeño comparado con la región G ; además n representa el número de esferas por unidad de volumen siendo constante en todo el líquido, salvo por términos despreciablemente pequeños. Así, se establece la siguiente ecuación: $A + B + C = 0$, con A, B, C como coeficientes de x, y, z respectivamente. Después de un interesante proceso de análisis matemático se llega a la conclusión de que si en un líquido existen esferas rígidas suspendidas muy pequeñas, el coeficiente de viscosidad aumenta en una fracción idéntica al volumen total de las esferas suspendidas en una unidad de volumen, siempre y cuando este volumen total sea muy pequeño. La tercera parte de la tesis se titula “Sobre el volumen de una sustancia disuelta cuyo volumen molecular es grande comparado con el del solvente”. Para esta parte se debe tomar en consideración una disolución diluida de una sustancia que no se disocia en la solución; ahora comparemos una molécula grande de la sustancia disuelta con una molécula del solvente y considerémosla como una esfera rígida de radio P ; entonces aplicamos el resultado obtenido en la parte anterior. Se hace análisis relativo a algunas propiedades del azúcar sólido y su disolución en agua, del que obtiene observaciones importantes. La cuarta parte se denomina “Sobre la difusión de una sustancia no disociada en una disolución líquida”. Para esta parte se debe tomar en cuenta una disolución del tipo planteado en la parte anterior. Así, si una fuerza K actúa sobre una molécula, que por supuesto es una esfera de radio P , entonces la molécula se moverá con una velocidad ω determinada por P y el coeficiente de viscosidad k del solvente y en la que es válida la ecuación propuesta a su vez por G. Kirchhoff: $\omega = (K)(6\pi kP)^{-1}$, con la que es posible calcular el coeficiente de difusión de una disolución no disociada. La quinta y última parte se denomina “Determinación de dimensiones moleculares con ayuda de las relaciones obtenidas” y que a manera de conclusión establece los resultados para P y N con base en los resultados presentados en las partes 1 – 4. Estos son, sin considerar las diferencias entre los valores de P a $9.5^\circ C$ y $20^\circ C$: $P = 9.9 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. $N = 2.1 \cdot 10^{23}$. Aclara Einstein que el valor encontrado para N (número total de moléculas reales por molécula- gramo) muestra una congruencia adecuada en orden de magnitud, con los valores encontrados para esta cantidad utilizando otros métodos.

El segundo artículo escrito ese año fue enviado a *Annalen der Physik* 17 (1905) localizado en las páginas 549-560 y se titula “Sobre el movimiento de partículas pequeñas suspendidas en líquidos en reposo exigido por la teoría cinético-molecular del calor”. Se divide en cinco apartados. El primer apartado de ellos se denomina “Sobre la presión osmótica que debe atribuirse a las partículas suspendidas”. En este apartado se consideran las moléculas – gramos de una sustancia no electrolítica disueltas en una porción V^l de un volumen total V de un líquido. Cuando el volumen V^l está separado del solvente puro por una

pared que es permeable al solvente pero no al soluto, entonces dicha pared está sometida a la llamada presión osmótica y concluirá en este apartado sobre la existencia de presión osmótica p de magnitud: $p = \frac{RT}{v^1} \frac{n}{N} = \frac{RT}{N} \cdot v$. El segundo apartado se denomina “La presión osmótica desde el punto de vista de la teoría cinético-molecular del calor”. Utilizando las herramientas del análisis matemático demuestra que la existencia de presión osmótica puede deducirse de la teoría cinético-molecular del calor por lo que a números iguales de moléculas de soluto y de partículas suspendidas, se comportan idénticamente con relación a la presión osmótica. La tercera parte se titula “Teoría de la difusión de pequeñas esferas suspendidas”. Aquí propone el estudio del estado de equilibrio dinámico bajo la hipótesis de que una fuerza K , dependiente de la posición pero no del tiempo, actúa sobre las partículas individuales. Utilizando la Integración como medio de expresión surgen importantes observaciones como la existencia de un movimiento de la sustancia suspendida bajo la influencia de la fuerza k que actúa sobre cada partícula suspendida y la existencia de un proceso de difusión a considerarse como el resultado de los movimientos desordenados de las partículas y producidos por el movimiento molecular térmico. La conclusión de este apartado da cuenta que excepto por constantes universales y la temperatura absoluta, el coeficiente de difusión de la sustancia en suspensión depende sólo de la viscosidad del líquido y del tamaño de las partículas suspendidas. El apartado 4 se denomina “Sobre el movimiento desordenado de partículas suspendidas en un líquido y su relación con la difusión”. Continuando con el uso del análisis matemático Einstein concluye en este apartado que el desplazamiento medio λ_x es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo: $\lambda_x = \sqrt{x^2} = \sqrt{2Dt}$ con D como el coeficiente de Difusión; también aclara que es fácilmente demostrable que la raíz cuadrada de los desplazamientos cuadráticos totales de las partículas tiene valor de: $\lambda_x = \sqrt{3}$. El quinto apartado versa sobre “Fórmula para el desplazamiento medio de partículas suspendidas. Un nuevo método para determinar el tamaño real de los átomos”. En este apartado el autor propone los siguientes enunciados como método de cálculo: 1) $\lambda_x = \sqrt{t} \cdot \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi kP}}$; 2) $N = \frac{1}{\lambda_x^2} \cdot \frac{RT}{3\pi kP}$. Finaliza su artículo anotando que espera que algún investigador logre pronto resolver el problema planteado en este artículo, de relevante importancia para la teoría del calor.

El tercer artículo de A. Einstein se titula “Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento”. Consta de dos partes, cada una con cinco secciones. 1) Parte Cinemática. Sección 1, titulada “Definición de simultaneidad”. Inicia con la interesante definición de sucesos simultáneos. Para ello utiliza el ejemplo de un viajero que sabe que el tren llega a la estación a las siete en punto, lo que significa que la manecilla pequeña de su reloj está apuntado a las 7:00 horas justo a la llegada del tren a la estación; estos son sucesos simultáneos (Uno de los editores puede constatar este hecho. En un viaje a Alemania y recorrer en tren sus principales ciudades, pudo corroborar la extremada puntualidad del servicio de trenes en aquel país. Si el itinerario estipula que un tren arriba a una determinada estación a una hora inclusive con fracción, el tren arriba justo a esa hora). Desde luego que existen imprecisiones que salen del control cotidiano; pero en general, se cumple. Así una

definición de tiempo intuitiva es simplemente sustituir la posición de la manilla pequeña del reloj por el concepto tiempo, desde luego tomando en consideración el lugar donde se encuentra ese reloj; así a lugares diferentes, relojes diferentes, tiempo diferentes. Tomando en consideración un rayo de luz, la sincronización de relojes en lugares A y B se puede expresar: $t_B - t_A = t'_A - t_B$ en que t'_A representa el reflejo del rayo de luz en ese punto. Nótese que se trata de un experimento mental. De esta manera, el “tiempo” de un suceso es la lectura obtenida simultáneamente de un reloj en reposo situado en el lugar del suceso que para todas las determinaciones temporales marcha de forma síncrona con un reloj especificado en reposo. Aquí se ha definido el tiempo a través de relojes en reposo en el sistema de reposo, que se denomina “tiempo del sistema de reposo”. Sección 2: “Sobre la relatividad de longitudes y tiempos. Es esta sección se parte de dos premisas: 1) el principio de la relatividad; 2) el principio de constancia de la velocidad de la luz. También se hace énfasis en un observador. Así, se va deduciendo que en la cinemática actual en el tiempo t un cuerpo rígido en movimiento es totalmente reemplazable, con relación a su geometría, por el mismo cuerpo cuando está en reposo en una posición concreta. Después de un breve análisis algebraico concluye que no es posible atribuir significado absoluto al concepto de simultaneidad, pues en su lugar, dos sucesos que son simultáneos cuando se observan desde algún sistema de coordenadas concreto ya no pueden considerarse simultáneos cuando son observados desde un sistema que está en movimiento relativo a dicho sistema. La tercera sección se denomina “Teoría de las transformaciones de coordenadas y tiempo desde el sistema de reposo a un sistema en movimiento de traslación uniforme relativo al primero” Aquí se presentan algunas ideas que pueden ser útiles para mejor entendimiento de esta sección y que son de uso común, por ejemplo dos sistemas, tres líneas rectas materiales rígidas, mutuamente perpendiculares con origen a un punto. Vale la pena que el lector se detenga y empiece a imaginar a detalle este marco de referencia. Además, sean coincidentes los ejes X de los dos sistemas y sean además, sus ejes Y, Z respectivamente paralelos. Cada sistema tiene a disposición una vara de medir rígida y un número de relojes, todos exactamente iguales. Ahora fijemos el origen de uno de los dos sistemas, en estado de movimiento con velocidad constante y en la dirección de la variable x creciente del otro sistema, que permanece en reposo. Se observa que a cada tiempo del sistema de reposo corresponde una localización definida de los ejes del sistema en movimiento. Así es que podemos suponer que los ejes del sistema en movimiento son paralelos a los ejes del sistema en reposo. También procede el experimento a un espacio a ser medido desde el sistema en reposo, con uso de la vara de medir en reposo y también desde el sistema en movimiento con su respectiva vara de medir. Se establecen las coordenadas geométricas necesarias. También se utilizan relojes en reposo para el sistema en reposo, rayos luminosos (descritos en la sección 1), para así determinar el tiempo del sistema de reposo en todos los puntos donde existan relojes. También se procede similarmente con el sistema en movimiento, pero en donde existen relojes en reposo relativo al sistema. Se considera el conjunto de valores que determina completamente el lugar y tiempo de cualquier suceso en el sistema de reposo y que le corresponde un conjunto de valores que fija el suceso relativo al sistema en movimiento. Por lo tanto debe hallarse el sistema de ecuaciones que conecta dichas cantidades y es justamente el propósito de esta tercer sección. La cuarta sección se titula “El

significado físico de las ecuaciones obtenidas en lo que concierne a cuerpos rígidos y relojes en movimiento”. Esta sección es sumamente interesante. Se parte del análisis de una esfera rígida de radio R , en reposo relativo al sistema en movimiento antes descrito y cuyo centro yace en el origen de este. Con base en un análisis algebraico geométrico, y considerando el resultado de dicho procedimiento para una línea poligonal, es válido también para una línea continuamente curvada, lo que permite llegar al siguiente resultado: Si existen en A dos relojes que marchan de forma síncrona, y uno de ellos se lleva a lo largo de una curva cerrada con velocidad constante hasta que haya vuelto nuevamente a A , en un tiempo determinado, entonces a su llegada habrá retrasado $\left(\frac{t}{2}\right) \left(\frac{v}{c}\right)^2$ respecto al reloj que no se ha movido. Así, un reloj de cuadrantes situado en el ecuador debe marchar más lento que un reloj totalmente idéntico localizado en cualquiera de los polos terrestres. La quinta sección se titula “El teorema de adición de velocidades”. Describe la velocidad de un sistema a lo largo del eje X de otro sistema tomando en consideración un punto que se mueve de acuerdo con las ecuaciones analizadas en las secciones anteriores. Se trata de establecer el movimiento del punto relativo al segundo sistema. Con base en la descripción de la suma de los cuadrados de las variaciones de movimiento en los ejes correspondientes a la abscisa y la ordenada se obtiene el cuadrado de la suma vectorial de velocidades, y sólo válida en una primera aproximación, pero permite ir deduciendo las leyes requeridas de la cinemática para así proceder a su aplicación a la electrodinámica. Segunda Parte. Llamada Electrodinámica. Sección primera titulada “Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío. Sobre la naturaleza de las fuerzas electromotrices debidas al movimiento en un campo magnético”. Inicia describiendo las ecuaciones de Maxwell-Hertz relativas al espacio vacío válido para el sistema de reposo:

$$\begin{aligned} V^{-1} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & V^{-1} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ V^{-1} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & V^{-1} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ V^{-1} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & V^{-1} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned}$$

Con (X, Y, Z) representando el vector fuerza eléctrico y (L, M, N) el vector fuerza magnética. En esta sección se trata de aplicar a las ecuaciones anteriores las transformaciones que se deducen en la sección 3. Es evidente que el principio de relatividad requiere que las ecuaciones descritas anteriormente para el espacio vacío sean también válidas en ambos sistemas de referencia descritos anteriormente. Después de realizar el proceso analítico correspondiente las ecuaciones descritas pueden expresarse con palabras y de dos maneras diferentes. 1) Si una carga eléctrica muy puntual y unitaria se mueve en un campo electromagnético, debe actuar sobre ésta una “fuerza electromotriz”, además de la fuerza eléctrica, que al no tomar en cuenta aquellos términos multiplicados por las potencias iguales y mayores que dos de $\frac{v}{c}$, es igual al producto vectorial de la velocidad de la carga y la fuerza magnética, dividido por la velocidad de la luz. 2) Si una carga eléctrica muy puntual y unitaria

se mueve en un campo electromagnético, la fuerza que actúa sobre ella iguala a la fuerza eléctrica en la localización de la carga unidad obtenida transformando el campo a un sistema de coordenadas en reposo relativo a la carga unidad. La segunda sección se titula “Teoría del principio Doppler y de la aberración”. Aquí una fuente de ondas electromagnéticas en un sistema de referencia y muy alejadas del origen de coordenadas son representadas por ecuaciones de las variables (X, Y, Z) y en términos del seno del ángulo de referencia. Esto con el propósito de investigar el carácter de dichas ondas cuando son analizadas por un observador en reposo dentro del sistema en movimiento. Para ello se aplican las ecuaciones de transformación para las fuerzas eléctrica y magnética descritas en la sección anterior y también aquellas para describir las coordenadas y el tiempo descritas en la sección 3, y al proceder con las técnicas de la trigonometría analítica concluye el autor que para un observador que se aproxima a una fuente luminosa a cierta velocidad, dicha fuente debería aparecer con intensidad infinita. La tercera sección se titula “Transformación de la energía de rayos luminosos. Teoría de la presión de radiación ejercida sobre espejos perfectos”. Inicia con la representación siguiente: $\frac{A^2}{8\pi}$ es la energía luminosa por unidad de volumen, y de acuerdo con el principio de relatividad esta expresión como la energía luminosa en el sistema en movimiento, por lo tanto $\frac{A'^2}{A^2}$ representa la energía de un complejo luminoso dado, medido en movimiento y medido en reposo, si su volumen es idéntico en dos sistemas de referencia. Se utilizan también las propiedades de la trigonometría analítica y se desarrolla el modelo que describe la presión P de luz:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

Como una primera aproximación y de acuerdo a experimentos y otras teorías se obtiene:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2\varphi$$

Concluye esta parte afirmando que todos los problemas de óptica de cuerpos en movimiento pueden resolverse mediante el método expuesto aquí. Esto debido a que los campos eléctrico y magnético de la luz que recibe la influencia de un cuerpo en movimiento se transforman a un sistema de coordenadas que está en reposo relativo con dicho cuerpo. Así, todos los problemas de óptica de cuerpos en movimiento se reducen a una serie de problemas de óptica de cuerpos en reposo. La cuarta sección denominada “Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz cuando se toman en consideración corrientes de convección”. Einstein parte de las ecuaciones descritas en la primera sección de esta segunda parte e incluyendo la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Y denota 4π veces la densidad de carga. También se incluyen las variables (u_x, u_y, u_z) que describen el vector velocidad de la carga. Estas variables se incluyen en el lado derecho de cada ecuación y después de finalizar el proceso analítico se concluye que si un cuerpo eléctricamente cargado se mueve arbitrariamente en el espacio sin alterar su carga cuando se observa desde un sistema de coordenadas que se mueve con el cuerpo, entonces su carga también permanece constante cuando se observa desde el sistema en reposo. La quinta parte se titula “Dinámica del electrón (lentamente acelerado)”. Da inicio con la descripción de una partícula cargada con carga e , llamada electrón que presenta movimiento en un campo electromagnético y con base en su ley de movimiento se puede realizar la hipótesis siguiente: Si este electrón está en reposo en un instante particular, su movimiento durante el siguiente instante de tiempo tendrá lugar con base en las siguientes ecuaciones:

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = eX,$$

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = eY,$$

$$\mu \frac{d^2z}{dt^2} = eZ,$$

Con x, y, z describiendo las coordenadas del electrón y μ su masa, siempre y cuando el electrón descrito se mueva lentamente. Al terminar el proceso analítico correspondiente el autor concluye que presenta una expresión completa de las leyes según las cuales, debe moverse el electrón, con base en la teoría descrita en estas páginas. Este es el artículo que describe la Teoría Especial de la Relatividad.

El cuarto artículo publicado por A. Einstein lo tituló “¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía? Tomando como base el artículo anterior y la premisa acerca de las Leyes que describen los cambios de estados de sistemas físicos e independientes de cuál de los sistemas de coordenadas es utilizado para describir dichos cambios (el principio de la relatividad), y también considerando supuestos en movimiento paralel-traslacional uniforme uno con relación al otro. También con base en la conclusión de la tercera sección de la segunda parte del artículo anterior y siguiendo las técnicas de la trigonometría analítica concluye que la masa de un cuerpo es una medida de su contenido de energía, si la energía cambia en un parámetro, también lo hará la masa en el mismo sentido; además si la energía se mide en ergios, la masa se mide en gramos. Por lo tanto, si esta teoría está de acuerdo con los hechos, entonces la radiación transporta inercia entre cuerpos emisores y absorbentes.

El quinto artículo se titula “Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz”. Este interesante artículo consta de nueve secciones. Amplia el vínculo entre la radiación magnética y la no continuidad cuántica. La primera sección se titula “Sobre una dificultad concerniente a la teoría de la radiación de un cuerpo

negro”. Basándose en la teoría de Maxwell y la Teoría del electrón, considera el autor una sección espacial limitada por barreras reflectantes en las que existen moléculas gaseosas y además electrones en movimiento libre que ejercen fuerzas generadas cuando éstos se aproximan demasiado y pueden chocar todos ellos y explicando esto con base en la teoría cinética de gases. A través de su análisis Einstein logra encontrar una relación muy específica entre la energía media de un resonador con su propia frecuencia y lo relaciona con la velocidad de la luz tomando en cuenta la unidad de volumen, y las considera condiciones de equilibrio dinámico, implicando en su modelo la imposibilidad de generar una distribución de energía definida entre el éter y la materia, concluyendo en una relación directamente proporcional entre el intervalo de frecuencias del resonador y la energía total de radiación inmersa en el volumen elegido. La segunda sección se titula “Sobre la determinación de Planck de los cuantos elementales”. Aquí demuestra la independencia de los cuantos elementales de la teoría de la radiación de cuerpo negro, concluyendo que a mayor densidad de energía y longitud de onda de radiación, son más entendibles los fundamentos teóricos establecidos hasta aquí, pero no funcionan para el caso de longitudes de onda y densidades de radiación bajas. La tercera sección se denomina “Sobre la entropía de radiación” y mediante las técnicas del análisis matemático describe la ley de radiación del cuerpo negro, obtenida a partir de la función φ cuya reciprocidad se determina precisamente por la integración. La cuarta sección se titula “Ley límite para la entropía de la radiación monocromática a baja densidad de radiación” en la que describe los resultados de investigar la dependencia de la entropía del volumen ocupado por la radiación y concluye con la expresión de la ecuación que describe la variación de la radiación monocromática de densidad baja con respecto al volumen unificándola con la ley para la entropía de un gas ideal e incluso de una solución diluida. La quinta sección se titula “Investigación teórico-molecular de la dependencia del volumen de la entropía de gases y soluciones diluidas” en la que por medio del análisis y observación de un caso especial pretende mostrar la probabilidad de que todos los elementos en movimiento independiente dentro de un volumen dado se encuentren en un momento de tiempo escogido aleatoriamente y deduce la expresión para la ley de Boyle-Gay-Lussac de forma termodinámica. La sexta sección se denomina “Interpretación de acuerdo con el principio de Boltzmann de la expresión para la dependencia de la entropía de la radiación monocromática respecto del volumen” en la que concluye, con base en técnicas algebraicas, con la expresión que describe la probabilidad de que la energía de radiación total sea localizada en una parte específica de un volumen dado en un momento de tiempo escogido azarosamente con la condición de contar con paredes reflectantes en ese volumen total en la que hay dentro radiación monocromática de frecuencia y energía dadas. La séptima sección la titula “Sobre la regla de Stokes” y se basa en la observación y análisis de la luz monocromática transformada por fotoluminiscencia, en luz de una frecuencia diferente. Describe la desigualdad de dos cuantos de energía incidentes de frecuencia dada (regla de Stokes) concluyendo en la posibilidad de concebir dos desviaciones de esta regla; por ejemplo en la sutil posibilidad de que a densidades muy bajas una radiación de tipo distinto a la radiación Wien actúe diferente en lo relativo a su energía de la radiación de cuerpo negro (dentro del rango propuesto por la ley de Wien). La octava sección la denominó “Sobre la generación de rayos catódicos por iluminación de cuerpos sólidos” en que se basa

en los trabajos de investigación de P. Lenard y describe también desigualdades importantes, tomando en cuenta las diferencias de potencial que atraviesan los rayos catódicos para generar luz visible cuantificados por experiencia, en cientos y hasta en miles de voltios, suponiendo por ello que la energía cinética de un electrón interviene en la generación de muchos cuantos de energía lumínica. La novena y última sección se titula “Sobre la ionización de gases por luz ultravioleta” y parte de la hipótesis de que un cuanto de energía lumínica sirve para ionizar a una molécula de gas, con el uso de luz ultravioleta y describe los efectos observados tomando en cuenta el límite superior para la energía de ionización, proponiendo la expresión que describe estas relaciones y que, de confirmarse el supuesto inicial será válida para todos los gases, tomando en cuenta la frecuencia y la absorción observable no ligada a la ionización.

En 1967 la editorial John Wiley & Sons , Inc., publicó el texto *Mathematics and Computing: with FORTRAN Programming* escrito por William Dorn del Centro de Investigación Watson de IBM establecido en Nueva York y Herbert J. Greenberg, profesor de la Universidad de Denver. Se dedica a estudiantes preuniversitarios y universitarios con conocimientos sobre álgebra, geometría y trigonometría, análisis básico, probabilidad y lógica matemática con un enfoque centrado en el uso de la computadora. El método expuesto en el texto se enfatiza en problemas de aplicación y algoritmos utilizados para resolverlos evitando el tratamiento de las demostraciones de los teoremas expuestos, aunque en ocasiones se describe la forma de su demostración. Requiere por supuesto, el autoestudio por parte del lector pues los ejercicios presentados no son fáciles de resolver pues intentan fomentar el reto, el ingenio y la creatividad. También tiene la finalidad de utilizarse como un suplemento en los cursos de programación de computadoras. A consideración de los autores, el uso de la computadora como una herramienta matemática posibilita al estudiante dar solución a algunos problemas y si es lo suficientemente curioso y ha desarrollado la intuición además de ser muy buen observador, pueda con el tiempo entender a conciencia algunos objetos matemáticos avanzados al redescubrir conceptos abstractos además de elaborar conjeturas. Se espera que la experiencia con el uso del lenguaje FORTRAN le proporcione comprensión y apreciación que le permitan utilizar las técnicas adquiridas en su vida profesional. Todo el contenido del texto se puede aplicar a cualquier versión del lenguaje FORTRAN y se puede utilizar en cualquier computadora que tenga un compilador FORTRAN (en aquella época, desde luego), pues en el libro se ofrece un apéndice que describía una lista con casi 80 tipos de computadoras que se podían utilizar. Se sugería al estudiante completar el estudio de este lenguaje de programación con textos específicos sobre este lenguaje, como el de D. McCracken. Cabe destacar que además de vincular el estudio de este lenguaje de programación y algunos temas de matemáticas, también se prepara al lector con técnicas de análisis numérico. Además se hacía énfasis en las limitaciones de la computación numérica de las computadoras digitales de aquella época. Con el apoyo de las notas a pie de página, se da a conocer la historia de las matemáticas hasta nuestros días mencionando en resumen las contribuciones y eventos vividos por los matemáticos y científicos renombrados y seleccionados con base en la relación de sus nombres con los temas descritos en el libro que contiene 26 referencias históricas. Es importante mencionar que en el año de 1967 cinco de estos científicos todavía vivían y el resto lo hizo durante el siglo

veinte. Los ejercicios propuestos tienen tres finalidades bien establecidas: a) permitir al estudiante practicar la mecanización de los métodos aprendidos; b) problemas que solicitan la propuesta de un modelo matemático de algún fenómeno físico y que permita probar e incrementar la comprensión de ideas matemáticas estudiadas; c) proponer problemas que fomentan en el lector el proceso heurístico y así adquirir conceptos y técnicas matemáticas adicionales. En 1954 John Backus publicó un artículo en el que hace referencia al uso de “IBM Mathematical FORMula TRANslating System (una interesante reseña histórica de J. Backus está disponible en formato pdf en: https://ia800807.us.archive.org/0/items/history-of-fortran/Image072217151026_text.pdf y publicado en julio de 1979); (otro interesante artículo del propio J. Backus publicado en 1998 está disponible también en formato pdf en: <http://www.cs.toronto.edu/~bor/199y08/backus-fortran-copy.pdf> y publicado por IEEE). Se sugería el uso de computadora que tuviese incorporado un compilador FORTRAN como la IBM 1620. Una solución ideal es contar con una terminal de teletipo y conectar a una computadora grande por medio de la línea telefónica (en aquellos años). Se sugería que cada estudiante debía utilizar esta tecnología ¡entre dos y tres horas al año escolar! Se hace énfasis en que una computadora como esta puede dar servicio a muchas terminales y se puntualizaba que el uso de esta tecnología sería cada vez más común en los centros de estudios superiores e industriales. Además se sugería que en lugar de terminales conectadas a una computadora remota se puede disponer de un sistema complejo de cómputo al que se le debe agregar máquinas de perforación y máquinas periféricas para mejor aprovechamiento. Sugerían los autores que los estudiantes debían practicar la perforación de tarjetas en un promedio de 15 a 30 minutos semanales por estudiante; también se recomendaba el uso de máquinas de contabilidad para proveer a los estudiantes de un listado de sus propias tarjetas perforadas con un promedio de práctica de 5 minutos por semana por estudiante. Cuando es utilizado el teletipo junto con una computadora remota, éstos sustituyen a la perforadora e impresora de tarjetas. La versión preliminar se probó en los cursos 1965 y 1966 en la escuela Secundaria de Greenwich, Connecticut con la ayuda de Andrew Hathaway y Bernard Capuano. El texto consta de nueve capítulos y cinco Apéndices. El capítulo 1 trata con Ecuaciones Lineales; el capítulo 2 con Desigualdades Lineales; el capítulo 3 presenta la Aritmética de computadoras y la programación FORTRAN; el capítulo 4 estudia los Algoritmos que nunca terminan; el capítulo 5 contiene la Resolución de ecuaciones por iteración; el capítulo 6 presenta las Sumas que nunca terminan; el capítulo 7 presenta Algoritmos para la determinación de áreas; el capítulo 8 versa sobre la lógica matemática y los circuitos a base de interruptores; el capítulo 9 trata sobre la teoría de la Probabilidad. Un ejemplo de ejercicio propuesto es el siguiente: Considera la siguiente serie: $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ Explica si converge o diverge y escribe un programa en lenguaje FORTRAN que calcule esta suma con precisión a milésimos de unidad. Debido a que la serie es decreciente con respecto al valor absoluto de cada término, el n ésimo término tenderá a cero, además que los signos son alternos. Por ello la serie es convergente. Con relación a la precisión del cálculo de esta serie debemos considerar la desigualdad $\frac{1}{n^2} < 10^{-4}$ con $n > 100$. El programa propuesto es el siguiente:

```
SUM = 0.0
```

```
N=101
```

```

OP =1.0
1 X = N
TERM = TOP / (X**2)
TOP = -TOP
SUM = SUM + TERM
N=N - 1
IF (N) 2,2,1
2 PRINT 100, SUM
100 FORMAT (7H $\oplus_1$  SUMA  $\oplus_1 = \oplus_1$ , F8.4)
STOP
END

```

La Universidad de Wisconsin-Parkside organizó la Conferencia sobre Teoría de Grupos llevada a cabo desde el miércoles 28 de junio y hasta el viernes 30 del mismo mes de 1972. Con un total de 22 participantes se abordaron importantes temas como las Álgebras de Hecke, Grupos finitos Residuales, Grupos de Nudos, Variedades de Números Primos Excepcionales, Grupos de Exponente IV, el Teorema de Higman, Grupos Primarios Abelianos, Anillos de Grupo Policíclico y el Teorema del Punto Cero, la Cohomología de Pregrupos y otros temas de relevancia para el estudio de la Teoría de Grupos y que entonces se presentaron resultados muy importantes. K. I. Appel reportó su investigación sobre el Problema de la Conjugación para grupos de Nudos y en el que desarrolla un método para mostrar problemas de palabras y conjugaciones para una clase grande de Grupos de Nudos, misma que incluye un gran número de nudos no alternados para los que no se había obtenido previamente resultados de conjugación. El método propuesto incluye una modificación de pequeños diagramas de cancelación, a su vez propuestos por Lydon y Schupp y aplicados a las presentaciones de Wirtinger de grupos de nudos. El elemento crucial de este método consiste en un pequeño diagrama de cancelación dual, que involucra a su vez un conjunto de curvas en el plano de una proyección del nudo. En este mismo evento académico, J. E. Roseblade publicó los resultados de su investigación denominada Anillos de Grupo Policíclico y el Teorema del Punto Cero y en el que hace referencia al trabajo de Karl Gruenberg relacionado al conocimiento de Anillos y que pueden ayudar a la investigación de ciertos tipos de grupos solubles con base en la Teoría de Anillos. Otro referente usado por Roseblade es el propuesto por Philip Hall en tres artículos para la Sociedad Matemática de Londres en 1954, 1959 y 1961 (año con secuencia calendárica congruente con 1972 y 2023).

En 1954 Hall propuso: “Si H es policíclico y finito y J es conmutativo y Noetheriano, entonces la igualdad $S = JH$ posee $Max\ r$ ”; que es una versión moderna del teorema Base de Hilbert. Para 1959 escribió: “Si K es un campo en el que todos sus elementos distintos de cero son raíces de la unidad, entonces los KN -módulos son todos de dimensión finita sobre K ”. Aquí, los Campos son precisamente aquellos con características de primicidad y completamente algebraicos. Finalmente, en 1961 estableció: “SI M es un $\mathbb{Z}N$ – módulo generado finitamente, con M^* adjunta, entonces cualquier elemento central en $\frac{\mathbb{Z}N}{M^*}$ con todos

los elementos adjuntos a las imágenes simples de M actúan con igualdad a cero al elevarse a una potencia entera positiva sobre M ". Considerando a M justamente como un anillo imagen de $\mathbb{Z}N$, se reescribe: Si $\mathbb{Z}N^\phi$ es un anillo imagen de $\mathbb{Z}N$, entonces cualquier elemento central de $\mathbb{Z}N^\phi$ extendido sobre el radical Jacobson es igual a cero al elevarse a una potencia entera positiva. Tal como lo puntualizó Hall, este resultado corresponde al clásico Teorema Fuerte del Punto Cero y cuya demostración la generó Rabinowicz. Con estos breves comentarios se puede observar la belleza de la abstracción en el campo de la Teoría de Grupos. Está publicado por editorial Springer con ISBN 3-540-06205-X.

En junio de 1978 el gran divulgador de la matemática Martin Gardner publica en su acostumbrada sección Juegos Matemáticos en la versión castellana Investigación y Ciencia número 21 de la revista Scientific American el artículo titulado "Música Blanca y Música Parda, Curvas Fractales y fluctuaciones del tipo $\frac{1}{f}$ ". Comenta el autor la tendencia de las composiciones musicales a imitar diversos ritmos naturales. La música sinfónica e inclusive la música electrónica brindan grandes posibilidades para la imitación. Por ejemplo, la imitación del atronador ruido de los cascos en *La Cabalgata de las Walkirias*, de R. Wagner así como otros ruidos estrepitosos del campo de batalla; en *Matanza en la décima Avenida* se puede apreciar un disparo de pistola y el aullar de la sirena de un auto de la policía; en *La pasión según San Mateo* de J. S. Bach puede escucharse el terremoto y el desgarrar del velo del templo; en la *Sinfonía de Los Alpes* de Richard Strauss se escuchan las esquilas de las vacas, precisamente agitando esquilas. Con este antecedente Gardner aborda el resultado de las investigaciones del físico Richard F. Voss del Centro de Investigación Watson de I. B. M. Su trabajo versa sobre el término "densidad espectral" y la "autocorrelación" de una magnitud variable. Benoit Mandelbrot quien entonces también trabajaba para el Instituto Watson estudió el efecto de los sonidos de instrumentos en las grabaciones, por ejemplo al grabar el sonido producido por un instrumento musical y después reproducir la grabación o más lenta o más rápidamente. El sonido obtenido cambiará considerablemente. Pero existe un tipo especial de sonido que se percibe de forma muy distinta. Cuando se reproduce la grabación de un sonido a velocidad diferente hasta ajustar el volumen de tal modo que su emisión sea exactamente igual al original, se percibirá este sonido al que Mandelbrot denominó "ruidos en escala". Así en electrónica como en la Teoría de la Información existen ejemplos de este tipo de ruido: los llamados "ruido blanco" y "ruido de Johnson". El primero se percibe como un siseo monótono e invariable al cambiar la velocidad de reproducción, de tal modo que su función de autocorrelación (que mide la relación de sus fluctuaciones en cada instante con las fluctuaciones anteriores) resulta ser invariablemente igual a cero. Este tipo de ruido es de origen térmico y se produce durante el movimiento aleatorio de los electrones que atraviesan una resistencia eléctrica. Se puede percibir en casi todos los "estáticos" recibidos en una radio o amplificador, en la "nieve" que llena las pantallas de televisión analógica y el radar cuando no existe señal de entrada. En el teclado de piano es posible generar una melodía "blanca" aleatoria sin correlación entre dos notas cualesquiera. Tomamos como base una octava de siete teclas blancas del piano: do, re, mi, fa, sol, la y si.

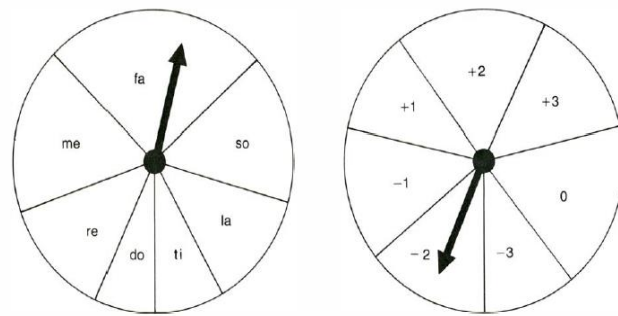
En este ejemplo, Fa será la frecuencia central. A continuación fabricamos un tipo de aguja de la suerte, es decir un círculo dividido en aproximadamente siete sectores (uno para cada tecla del piano y sin importar las longitudes de los arcos asignados a cada tecla, es más pueden ser totalmente aleatorios) e instalar una flecha giratoria en su centro (como en la figura 2). Desde luego, entre mayor área sea asignada a una tecla, mayor será la probabilidad de resultar elegida. Como hemos escogido la nota Fa como frecuencia central, entonces le debe corresponder mayor área de sector circular. Así, para producir una “melodía blanca” se hace girar la flecha dentro de nuestra rueda tantas veces como se quiera, escribiendo cada vez la nota resultante al detenerse la flecha giratoria. Debido a la aleatoriedad de resultados, la secuencia melódica generada será totalmente ajena a las reglas musicales de la armonía y la melodía. También se pueden incluir todos los 12 sonidos de una octava musical o todas las 88 teclas del piano si se quiere. Es más, si se quiere complicar la composición, se puede utilizar una segunda “aguja de la suerte” pero ahora dividida en tantas partes como se quiera de modo que cada sector incluya el valor relativo de los sonidos musicales: $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64})$ y así asignar a cada nota obtenida un valor relativo. Cuando se termina la generación aleatoria de sonidos y sus tiempos y se ejecuta al piano, sonará exactamente como lo que es, una tediosa, insipiente, monótona y desarticulada melodía. Un segundo tipo más complicado de ruido de escala es el llamado ruido browniano que representa al movimiento browniano o movimiento aleatorio de diminutas partículas en suspensión en un líquido y provocado por los tropicónes de las moléculas en agitación, es decir, cada molécula realiza un paseo aleatorio tridimensional y cuyas sucesivas posiciones generan una serie de elevada correlación, que da a entender que cada partícula en movimiento “ha memorizado” el lugar donde estuvo anteriormente. Si seguimos las ideas de Voss, cuando los sonidos fluctúan de esta manera, se produce “música browniana” o “música parda”. Para general este tipo de música seguimos el procedimiento de nuestra “aguja de la suerte”. Podemos dividirla en siete partes, pero ahora rotularemos las regiones para que representen intervalos entre dos notas sucesivas de la melodía (un intervalo es la separación melódica entre dos sonidos; se ha convenido en llamarlos de acuerdo con la escala musical y tomando como punto de partida una nota cualquiera). Así tenemos la tónica o sin separación; la segunda mayor, la segunda menor; la tercera mayor, tercera menor, cuarta justa, quinta justa o perfecta, sexta mayor, sexta menor, y séptima. Esto da lugar en armonía musical a nombres como: tónica, sobretónica, medianta, subdominante, dominante, sobredominante y séptima sensible que corresponden a las distancias, y como se aprecia son siete. De igual forma el tamaño de los sectores circulares relacionados a cada intervalo y su probabilidad pueden ser elegidos al azar. Se escriben los signos relativos a “positivo” y “negativo” que permite moverse a la derecha de la nota elegida o a su izquierda tantos intervalos como lo indique el número junto al signo. Se puede comenzar con cualquier tecla del piano y con el uso de la ruleta se genera un paseo aleatorio a la derecha y a la izquierda del teclado del tal forma que los sonidos generados irán vagando de un lado a otro en el teclado hasta que, en un momento determinado se saldrá del teclado. Si pensamos que los extremos del teclado funcionen como “barreras de absorción” la tonada terminará por tropezar con alguna de ellas. Modificando nuestro procedimiento es posible generar barreras reflectantes o barreras elásticas, modificando las agujas de la suerte, de manera tal que en cuanto mayor sea el intervalo a partir

de la tecla o nota elegida, mayor sea su probabilidad de regresar a ella. Se puede complicar aún más el experimento al utilizar una segunda aguja de la suerte, como en la producción de ruido blanco, pero no para determinar la duración del sonido sino el incremento o decremento de la duración de cada nota. Este tipo de sonidos sonará muy distinto de los correspondientes a la melodía blanca debido a su fuerte correlación, pero sigue siendo una tonada con escaso o nulo valor estético musical, como el caminar de alguien ebrio por una callejuela; efecto alejado totalmente de producir buena música. De estos resultados se han propuesto métodos para generar “música estocástica”. Voss sugirió un modelo intermedio entre los dos anteriores, al seleccionar un ruido en escala exactamente a mitad de camino entre estos dos, que en la terminología del Análisis Espectral se le conoce como ruido $\frac{1}{f}$ debido a que el ruido blanco posee una densidad espectral $\frac{1}{f^0}$ y el ruido browniano posee una densidad espectral de $\frac{1}{f^2}$; como se aprecia, en el ruido $\frac{1}{f}$ el exponente de f será igual o muy cercano a la unidad. Las melodías basadas en este ruido tienen una correlación moderada, tanto en fragmentos cortos como en pasajes musicales de cualquier tamaño y consecuentemente los oyentes consideran a esta música mucho más agradable que la música blanca y música parda. En electrónica a este ruido se le conoce como ruido de trémolo. Mandelbrot descubrió que los datos estadísticos sobre las crecidas anuales del Nilo forman una sucesión de fluctuación $\frac{1}{f}$.

Recuérdese que este gran autor acuñó el término *fractal* debido a que le asigna a cada una de estas curvas una dimensión fraccionaria mayor que su dimensión topológica (como la Curva de Peano, 1890 y a Curva “Copo de Nieve” de Helge von Koch en 1904). Tal como lo demostró Mandelbrot, la curva de Peano posee dimensión 2, pero su frontera, un fractal sin variación alguna que por cambios de escala de longitud infinita posee dimensión fractal de $(\log 4)(\log 3)^{-1} \approx 1.2618 \dots$ Martin Gardner en su artículo, no resiste la tentación de mencionar tres curiosas formas de transformar alguna melodía en otra diferente que tenga la misma densidad espectral $\frac{1}{f}$ tanto en el motivo melódico como en la duración de las notas de la composición. Una de ellas consiste en reescribir la melodía empezando en el último compás y terminando en el primero, es decir, de atrás hacia adelante; la segunda manera consiste en volver la partitura, es decir, voltearla al revés, de tal forma que el último renglón del pentagrama ahora sea el primero. La tercera forma es combinar las dos operaciones mencionadas anteriormente. Pero para que los sonidos resultantes sean verdaderamente armoniosos se necesita ser todo un talento musical, pues no todas las melodías pueden reescribirse como se mencionó y sonar agradablemente al oído. Este tipo de composiciones fueron muy utilizadas durante el siglo Quince, composiciones contrapuntísticas normalmente para dos voces en la que una de ellas es la otra de atrás hacia adelante. El magnífico, genial y creativo músico y compositor W. A. Mozart escribió una melodía como la descrita, pero cuyo efecto sonoro es bastante agradable al oído. Se titula Krebsgang. Un intérprete lee la partitura normalmente. El segundo invierte la hoja y lee también. Es decir uno lee normalmente y el otro lee la hoja invertida “de atrás hacia adelante”.



Figura 1. Portada de la añorada revista.



Ruedas de la fortuna para obtener música blanca (izquierda) y música parda (derecha)

Figura 2. Descripción de la “flecha de la Suerte”.

Revista Investigación y Ciencia No. 21 en el mes de junio de 1978.

Compartimos la dirección url en la que se muestra la interpretación de la composición de W. A. Mozart titulada Krebsgang: https://www.youtube.com/watch?v=tIWGj_sncbs



Figura 3. Krebsgang de W. A. Mozart. Revista Investigación y Ciencia No. 21 en el mes de junio de 1978.

Las tres imágenes anteriores son publicadas originalmente por la Revista Investigación y Ciencia No. 21 en el mes de junio de 1978.

En éste número y coincidiendo con los avances científicos antes expresados se presenta un artículo dedicado a la demostración de grupos nilpotentes basados en las series centrales inferiores y superiores; así mismo se presenta una evolución al algoritmo J1 presentado en el número 8 de la Revista *JOOM* en donde el J2 se presenta como un teorema que permite la solución a ecuaciones cuárticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ partiendo de un resolvente cúbico. Por otro lado y nuevamente coincidiendo con la descripción histórica de las aportaciones físicas de Einstein se presenta en la sección un modelo matemático de predictibilidad de manchas solares basado en machine learning utilizando la estacionalidad que presentan las series de tiempo con el modelo ARIMA con su respectiva programación; así mismo se encuentra un artículo con varias propuestas originales para economía, educación y seguridad ciudadana mediante un enfoque global.

La revista *JOOM* se complace en invitar a su primer evento anual para el año 2024 con motivo de la celebración de los 50 años de la publicación de Gerhard Ringel sobre la propuesta de solución al problema del coloreado de mapas, además de la congruencia de la secuencia de días del calendario a partir del 1ero de Marzo entre 1974 y 2024; se llevará a cabo el **Congreso Internacional de Objetos y Objetivos Matemáticos (CIOOM 2024)** junto con el ***Symposium Internacional sobre Reflexiones y Avances en el Problema de los Cuatro Colores y la Teoría de Grafos 2024*** en la ciudad de México los días 14 y 15 de Marzo del 2024 dentro de las instalaciones de la biblioteca Vasconcelos. Los tópicos de trabajo los pueden revisar de acuerdo con la convocatoria que podrá encontrar en el sitio www.cioom.org. Ambas opciones de publicación son libres de costo para los autores y la asistencia al evento es gratuita para el público en general pudiendo obtener constancia con la valor curricular.



Los editores.

Los Grupos nilpotentes basados en las Series Centrales inferiores y superiores.

Francisco Guillermo Herrera Armendia

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- La investigación en Teoría de Grupos ha presentado grandes avances a partir del siglo pasado con los resultados presentados por Kurosh, Kaplansky, Suzuki, Coxeter, Birkhoff, McLane, Hall y muchos otros más con temas relacionados con Grupos Abelianos, Grupos Abelianos Infinitos, la Estructura de un Grupo y la Estructura de su Retícula de subgrupos, Generadores y relaciones para Grupos Discretos. En esta breve contribución expongo ideas axiomáticas como una descripción del tema propuesto en el título de la misma.

Palabras Clave- Grupo, Series centrales, nilpotencia, supersolucionabilidad.

Zusammenfassung - Die Forschung in der Gruppentheorie hat seit dem letzten Jahrhundert große Fortschritte gemacht, wobei die Ergebnisse von Kurosh, Kaplansky, Suzuki, Coxeter, Birkhoff, McLane, Hall und vielen anderen zu Themen im Zusammenhang mit abelschen Gruppen, unendlichen abelschen Gruppen, der Struktur einer Gruppe usw. präsentiert wurden. Struktur seines Rasters aus Untergruppen, Generatoren und Beziehungen für diskrete Gruppen. In diesem kurzen Beitrag präsentiere ich axiomatische Ideen als Beschreibung des vorgeschlagenen Themas.

Schlüsselwörter - Gruppe, Zentralreihe, Nullpotenz, Superlösbarkeit.

резюме темы - Исследования в области теории групп продемонстрировали большие достижения с прошлого века: результаты были представлены Курошем, Капланским, Судзуки, Коксетером, Биркгофом, Маклейном, Холлом и многими другими по темам, связанным с абелевыми группами, бесконечными абелевыми группами, структурой группы и Структура сетки подгрупп, генераторов и связей для дискретных групп. В этом кратком эссе я представляю аксиоматические идеи как описание предложенной темы.

Ключевые слова - Группа, Центральный ряд, нильпотентность, сверхразрешимость.

Mathematical Subject Classification: 20E07, 11M41.

I. INTRODUCCIÓN

El objeto matemático denominado Nilpotencia ofrece ventajas en el campo de la Geometría Algebraica pues permite grandes posibilidades de generar analogías algebraicas muy útiles. Tiene relación con el álgebra y los grupos, además de ser en sí, un elemento importante. Además, la Supersolucionabilidad y la nilpotencia son dos propiedades cuantitativas de los Grupos, que se basan en el desarrollo de las Series Centrales inferiores y superiores y que son mucho más influyentes que el objeto matemático denominado solucionabilidad. Esta es la base axiomática para el estudio de la Teoría de los Grupos Nilpotentes, el subgrupo de Frattini de un grupo y los grupos Supersolucionables dentro del contexto de investigación sobre

un teorema de Froebenius y el caso de los Grupos Solucionables.

II. NOCIONES.

1.- $\exists m \mid m^n = 0; n \in \mathbb{N} \forall M$, en que M es un anillo o semigrupo.

2.- $n \geq 1 \rightarrow \exists \mathfrak{N}_i$ o índice de nilpotencia, por noción 1
Nota 1.- Se asigna este término al elevar una base a una potencia positiva con cero como resultado. Sea, por ejemplo [1]: sea p un número de la forma $4n \pm 1 \vee 6n \pm 1$ [2] con $n \in \mathbb{N}$. Además, sea $A_r \text{ mod } p^n$ un Anillo residual módulo p^n , bajo asociatividad multiplicativa, entonces la clase de residuo de p es nilpotente de índice n ; sea $x \in \mathcal{A}$, con $\mathcal{A}$ como Anillo Conmutativo, $x \in \mathfrak{N}_i \leftrightarrow x \in \mathcal{P}$, siendo $\mathcal{P}$ el conjunto de los primos ideales de $\mathcal{A}$.

Consecuencia 1.- $\mathcal{A}$ se puede interpretar como un anillo de funciones sobre un espacio espectral $\mathcal{A}$, ($\text{Espec}_{\mathcal{A}}$), de modo que todo elemento de $\mathfrak{N}_i$ son asignados a funciones que se desvanecen idénticamente

Nota 2.- Este objetos matemáticos (elementos nilpotentes) son bastante utilizados en geometría algebraica debido a que posibilitan mucho la obtención de analogías puramente algebraicas en gran variedad de conceptos.

3.- $y \in \mathbb{N} \wedge y \cdot y \cdot \dots = 0 \rightarrow \exists \mathcal{Alg}_{\mathfrak{N}}$, (Álgebra Nilpotente). Pero $y_n \cdot \dots \cdot y_{n-1} \neq 0 \rightarrow \exists y \mid y \in \mathfrak{N}_i$ de $\mathcal{Alg}_{\mathfrak{N}}$.

Nota 3.- Los objetos matemáticos como un álgebra de matrices triangulares estrictamente superiores o un álgebra con asociatividad multiplicativa en cero o el producto tensorial de dos álgebras en la que una de ellas es nilpotente, entre otros muchos [1].

3.1.- Algunas Propiedades [1] [3] de $\mathcal{Alg}_{\mathfrak{N}}$.

3.1.1.- $\mathcal{Alg}_{\mathfrak{N}}$ es un conjunto cerrado con respecto a imágenes homomórficas (relación funcional entre grupos que mantiene necesariamente la operación binaria) y a sub-álgebras.

3.1.2.- $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \mathcal{I}_{\mathfrak{N}}$ con x como elementos ideales nilpotentes finitos y $\mathcal{I}_{\mathfrak{N}}$ como conjunto ideal nilpotente.

3.1.3.- $(J_{1\mathfrak{N}} + J_{2\mathfrak{N}} + J_{3\mathfrak{N}} + \dots + J_{n\mathfrak{N}} = J_{\ell\mathfrak{N}}$ con $J_{n\mathfrak{N}}$ como elementos ideales nilpotentes es localmente nilpotente.

3.1.4.- Sea $\mathfrak{U}_{\mathbb{D}}$ un álgebra dimensional finita; $\mathfrak{K}_0 \supset (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ un campo con característica cero con elementos (3.1.2). $\mathfrak{U}_{\mathbb{D}}$ sobre $\mathfrak{K}_0$ es $\mathcal{J}_{\mathfrak{N}}$.

3.1.5.- Si $\mathcal{A}$ es un álgebra; $\mathcal{P}_d$ una identidad polinomial de grado d , y además cuando $\mathcal{A}$ satisface a $\mathcal{P}_d$ entonces todo sub-anillo nilpotente de éste último con grado $[d \cdot \frac{1}{2}]$ pertenece necesariamente a una suma de ideales nilpotentes.

4.- Sea $\mathfrak{G}$ un grupo, que cumple: $\mathfrak{G} = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_{k+1} = \{1\}$, es decir posee series normales; además $\forall \frac{A_i}{A_{i+1}}$ y que se extiende hacia el punto medio de $\frac{\mathfrak{G}}{A_{i+1}}$ se denomina Grupo de series centrales [1] [4].

5.- En todo conjunto dado de series centrales con la característica de ser lo más corta posible, su longitud se denomina grado de nilpotencia $\mathcal{G}_{\mathfrak{N}}$.

6.- Sea $\mathfrak{G}_{\mathfrak{N}}$ un Grupo Nilpotente. $\forall \mathfrak{G}_{\mathfrak{N}}$, las series centrales se dividen en subgrupos de $\mathfrak{G}_{\mathfrak{N}}$ con longitudes iguales a la clase de nilpotencia $\mathfrak{G}_{\mathfrak{N}}$.

7.- $\forall \mathfrak{G}_{\mathfrak{N}}$ finitos, se agotan por medio de productos directos de p -grupos con órdenes p^k ; con p de la forma $4n \pm 1 \vee 6n \pm 1$.

8.- $\forall \mathfrak{G}_{\mathfrak{N}}$ finitos y que forman subgrupos libres de torsión a causa del grupo cociente formado se denominan grupos nilpotentes finitamente generados libres de torsión $\mathfrak{G}_{\mathfrak{N} \rightarrow t}$.

9.- $\mathfrak{G}_{\mathfrak{N} \rightarrow t}$ son agotados por medio de matrices triangulares enteras cuyos 1's están a lo largo de la diagonal principal, teniendo en consideración sus subgrupos.

10.- $\forall \mathfrak{G}_{\mathfrak{N} \rightarrow t}$ puede ser aproximado por un p -grupo para $\forall p$, con p de la forma $4n \pm 1 \vee 6n \pm 1$.

11.- $\mathfrak{G}_{\mathfrak{N}}$ finitos son grupos Policíclicos $\mathfrak{G}_{\mathfrak{P}}$ que poseen series centrales con factores cíclicos [1] [5].

III. DEFINICIONES

1.- Un grupo $\mathfrak{G}$ es supersolucionable [6] si posee $\mathfrak{G} = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_{k+1} = \{1\}$ (Noción 4) en que cada grupo factor $\frac{A_i}{A_{i+1}}$ es cíclico (Noción 11)).

Nota 4.- Existen dos propiedades muy importantes de los grupos: la supersolucionabilidad y la nilpotencia, que cualitativamente son más influyentes que la solucionabilidad.

2.- Todo grupo $\mathfrak{G}$ es nilpotente si tiene como característica unas series normales finitas $\mathfrak{G} = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_{k+1} = \{1\}$ (Noción 4, Def. 1) y además

$\frac{A_i}{A_{i+1}}$ está en el centro o punto medio de $\frac{\mathfrak{G}}{A_{i+1}}$, para $i = 1, \dots, r$. [6], (Noción 4, Def. 1).

Nota 5.- En estos casos $\frac{A_i}{A_{i+1}}$ es Abeliano, por lo que sus propiedades implican la solucionabilidad de $\mathfrak{G}$ (Propiedades 3.1.1 3.1.5). También es interesante hacer notar que en un grupo $\mathfrak{G}$ supersolucionable $A_{i-1} = \{b_{i-1}, A_i\}$ donde b_{i-1} representa cualquier elemento de A_{i-1} mapeado sobre un generador de grupo cíclico $\frac{A_i}{A_{i+1}}$ y consecuentemente $\mathfrak{G}$ es finitamente generado. Por ello, los grupos nilpotentes incluyen a todos los Grupos Abelianos, y por ello un grupo nilpotente no necesita ser finitamente generado.

3.- $\mathfrak{G}$ es supersolucionable si toda imagen homomórfica de él contiene un subgrupo cíclico normal [6] [7], (Noción 3, Propiedad 3.1.1).

Nota 6.- En [7], se muestra que esta definición es equivalente a la propuesta aquí presentada para grupos finitamente generados.

4.- Para efectos de clarificar las expresiones [6] están las siguientes equivalencias, con relación a la Serie Central inferior y superior:

- $x^{-1}y^{-1}xy \equiv \langle x, y \rangle$
 - Sean A, B , subgrupos. $\langle A, B \rangle \equiv \mathfrak{G}$ (Grupo generado) por todo $(a, b) | a \in A, b \in B$
 - $\langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle \equiv \langle (x_1, \dots, x_{n-1}), x_n \rangle$
 - Sean $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ subgrupos:
 $\langle A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \rangle \equiv \langle (A_1, \dots, A_{n-1}), A_n \rangle$
 - $a^x = x^{-1}ax$
- 5.- Identidades sobre los conmutadores superiores.
- $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^{-1}$
 - $\langle xy, z \rangle = \langle x, z \rangle^y \langle y, z \rangle = \langle x, z \rangle \langle x, z, y \rangle \langle y, z \rangle$
 - $\langle x, yz \rangle = \langle x, z \rangle \langle x, y \rangle^z = \langle x, z \rangle \langle x, y \rangle \langle x, y, z \rangle$
 - $\langle x, y^{-1}, z \rangle^y \langle y, z^{-1}, x \rangle^z \langle z, x^{-1}, y \rangle^{-1} = 1$
 - $\langle x, y, z \rangle \langle y, z, x \rangle \langle z, x, y \rangle = \langle y, x \rangle \langle z, x \rangle \langle z, y \rangle^x \langle x, y \rangle \langle x, z \rangle^y \langle y, z \rangle^x \langle x, z \rangle \langle z, x \rangle^y$

6.- i) $\Gamma_1 \mathfrak{G} = \mathfrak{G}$
ii) $\Gamma_k(\mathfrak{G}) = \{(x_1 \dots x_k)\}$, para arbitrarios $x_i \in \mathfrak{G}$.

Nota 7.- Estas definiciones se aplican a subgrupos de un grupo $\mathfrak{G}$. Ahora, debido a la igualdad: $(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}) = [(y_1, y_2), y_3, \dots, y_{k+1}]$, se infiere que $\Gamma_{k+1}(\mathfrak{G}) \subseteq \Gamma_k(\mathfrak{G}) \forall k$. Por consecuencia, $\Gamma_k(\mathfrak{G})$ representa a los subgrupos totalmente invariantes de $\mathfrak{G}$.

7.- Las series $\mathfrak{G} = \Gamma_1(\mathfrak{G}) \supseteq \Gamma_2(\mathfrak{G}) \supseteq \Gamma_3(\mathfrak{G}) \supseteq \dots$ se denomina Serie Central inferior.

IV. TEOREMAS.

Teorema 1.- $\Gamma_{k+1}(\mathfrak{G}) = [\Gamma_k(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}]$.

Demostración: Por Def. 4 (iii) se tiene $(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}) = \langle (y_1, \dots, y_k), y_{k+1} \rangle$, por consiguiente y por nota 7, $\Gamma_{k+1}(\mathfrak{G}) \subseteq \Gamma_k(\mathfrak{G})$, $(\mathfrak{G})$ es irrelevante. Además por Def. 5 (i) y (ii) existen las expansiones $x = (a_1, \dots, a_k)$; $y = (a_1, \dots, a_k)^{-1}$; $z = a_{k+1} \therefore (a_1, \dots, a_k, a_{k+1})^y \langle (a_k, \dots, a_k), a_k^{-1}, a_{k+1} \rangle = (a_{k+1}, 1) = 1$, por Def. 5 (iv), lo que justifica que

$\langle (a_k, \dots, a_k), a_k^{-1}, a_{k+1} \rangle \in \Gamma_{k+1}(\mathfrak{G})$, así como el término $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})^y$. Ahora, con relación a $[(\Gamma_k(\mathfrak{G}), \mathfrak{G})]$ infiero que se genera por los elementos $(s_1 s_2, \dots, s_n, t) \mid s_i = (a_1, \dots, a_k) \vee (a_1, \dots, a_k)^{-1} \therefore (s_i, t) \in \Gamma_{k+1}(\mathfrak{G})$ por Def. 5 (i). ■

Corolario 1.- $\frac{\Gamma_k(\mathfrak{G})}{\Gamma_{k+1}(\mathfrak{G})}$ se localiza en el centro o punto medio de $\frac{\mathfrak{G}}{\Gamma_{k+1}(\mathfrak{G})}$.

Consecuencia 2.- Se obtienen las siguientes definiciones:

Definición 7.- $\mathfrak{D}_0 = 1 \subseteq \mathfrak{D}_1(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{D}_2(\mathfrak{G}) \subseteq \dots \mathfrak{D}_i(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{D}_{i+1}(\mathfrak{G}) \subseteq \dots$, es una serie central superior para un grupo arbitrario $\mathfrak{G}$.

Definición 8.- $\mathfrak{D}_{i+1}(\mathfrak{G}) = \frac{\mathfrak{D}_{i+1}(\mathfrak{G})}{\mathfrak{D}_i(\mathfrak{G})}$ y además es el centro de $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_i(\mathfrak{G})}$. Además, el centro de un grupo es una característica de un subgrupo (aunque no como una invariante totalmente general), así que cada $\mathfrak{D}_i$ es una característica subgrupal de $\mathfrak{G}$.

Definición 9.- $(\mathfrak{G}) = A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_{r+1} = 1$ y que $\frac{A_i}{A_{i+1}}$ está en el centro de $\frac{\mathfrak{G}}{A_{i+1}}$ se denomina Serie Central.

Teorema 2.- $(\mathfrak{G}) = A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_{r+1} = 1$ es una Serie Central para $\mathfrak{G}$. Entonces, $A_i \supseteq \Gamma_i(\mathfrak{G}) \mid i = 1, \dots, r + 1$ y $A_{r+1-j} \subseteq \mathfrak{D}_j(\mathfrak{G}) \mid j = 0, 1, \dots, r$.

Demostración: $\frac{A_i}{A_{i+1}}$ está en el centro de $\frac{\mathfrak{G}}{A_{i+1}}$ por Def. 9 de la Consecuencia 2, Corolario 1, tengo la pertenencia $(A_i, \mathfrak{G}) \subseteq A_{i+1}$. Además, $\Gamma_{i+1}(\mathfrak{G}) = (\Gamma_i(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}) \subseteq (A_i, \mathfrak{G}) \subseteq A_{i+1}$. Aplicando la inducción matemática se justifica que $A_i \supseteq \Gamma_i(\mathfrak{G}) \forall i$. Ahora, si supongo que para algún i en $A_{r+1-i} \subseteq \mathfrak{D}_i(\mathfrak{G})$, por Def. 8 de la consecuencia 2, Corolario 1. Como consecuencia, $\exists \mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_i(\mathfrak{G})}$ que es imagen homomórfica de $\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{G}}{A_{r+1-i}}$ por Def. 3, con núcleo $\frac{\mathfrak{D}_j(\mathfrak{G})}{A_{r+1-j}}$. Como $\frac{A_{r-i}}{A_{r+1-i}}$ está en el centro de $\mathfrak{U}$, de donde su imagen homomórfica está en $\mathfrak{T}$, se debe localizar en el centro de $\mathfrak{T}$ por Def 3, Def. 8, Def. 9. ■

Corolario 2.- En un grupo nilpotente $\mathfrak{G}$ las series centrales inferior y superior tienen ambas la misma longitud ℓ . Si existe una serie central finita de longitud ℓ , tanto las series inferior como superior tienen como máximo la longitud ℓ . Si ambas series se comparan entre sí, se infiere que ninguna puede ser mayor que la otra. De ahí que posean la misma longitud ℓ .

Definición 10.- A este valor ℓ se le denomina clase del grupo nilpotente.

Definición 11.- Un grupo nilpotente de clase 1 es un grupo Abeliano.

Teorema 3.- Si a un grupo $\mathfrak{G}$ lo generan los elementos $x_1, \dots, x_r$, entonces $\frac{\Gamma_k(\mathfrak{G})}{\Gamma_{k+1}(\mathfrak{G})}$ se genera por conmutadores simples $(y_1, y_2, \dots, y_k) \bmod \Gamma_{k+1}(\mathfrak{G})$ y en que los elementos del segundo conjunto se escogen a partir de los elementos del

primer conjunto y no necesariamente pueden ser distintos.

Demostración: Por Def. 5 (ii). Sea $\mathfrak{G} = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k) \mid a_i \in \mathfrak{G}$ un grupo conmutador. Entonces, por dicha Definición, tengo $\langle (a_1, \dots, a_{k+1}), a_k \rangle \wedge (a_1, \dots, a_{k-1}) \in \Gamma_{k-1}(\mathfrak{G})$ y por inducción matemática se hace evidente que la estructura descrita no cambia, ya que todas las formas pertenecen a $\Gamma_k(\mathfrak{G})$. Al aplicar repetidamente el método de inducción matemática distingo que el módulo $\Gamma_{k+1}(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}$ describe al producto conmutador, por Def. 5 (ii) y (iii). ■

Corolario 3.- Si r elementos de un conjunto generan al conjunto $\mathfrak{G}$, entonces $[\Gamma_k(\mathfrak{G})] \cdot [\Gamma_{k+1}(\mathfrak{G})]^{-1}$ se genera por al menos r^k elementos.

Definición 12.- Si un grupo $\mathfrak{G}$ es nilpotente de clase c , entonces todo conmutador $(a_1, \dots, a_{k+1})$ es la identidad: Además, si $(a_1, \dots, a_{k+1}) = 1$, entonces $\mathfrak{G}$ en nilpotente de clase c , cuando mucho y cuando cumple para toda $a_i \in \mathfrak{G}$, este conjunto $\mathfrak{G}$ posee la característica *nil- c*.

Teorema 4.- Un grupo nilpotente finitamente generado es supersolucionable.

Demostración: Sea $\mathfrak{G}$ nilpotente y además generado finitamente. Su serie central inferior es: $\mathfrak{G} = \Gamma_1(\mathfrak{G}) \supset \Gamma_2(\mathfrak{G}) \supset \dots \supset \Gamma_c(\mathfrak{G}) \supset \Gamma_{c+1}(\mathfrak{G}) = 1$. Además, debido a que $\Gamma_c(\mathfrak{G})$ es Abeliano y finitamente generado por Def. 11 es por consiguiente, el producto directo de j grupos cíclicos, por Def. 3. También se distingue que $\Gamma_c(\mathfrak{G})$ está en el centro de $\mathfrak{G}$ por lo que consecuentemente cualquier subgrupo de él es normal en $\mathfrak{G}$, por Def. 8, Def. 9, Corolario 1, Teorema 2, Corolario 2. Como consecuencia, existe la cadena $\Gamma_{c+1} = 1 \subset \{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \dots \subset \{a_1, a_2, \dots, a_\mu\} = \Gamma_c(\mathfrak{G})$, siendo todos subgrupos normales de $\mathfrak{G}$ con la propiedad de que el grupo factor de los grupos consecutivos es cíclico, por Def. 3. Concluyendo en que se evidencia por Noción 4 y Def. 1, una serie para el conjunto $\mathfrak{G}$ cuya propiedad definida para este conjunto es la supersolubilidad. ■

Definición 12.- Si un grupo $\mathfrak{G}$ es nilpotente de clase c , entonces todo conmutador $(a_1, \dots, a_{k+1})$ es la identidad: Además, si $(a_1, \dots, a_{k+1}) = 1$, entonces $\mathfrak{G}$ en nilpotente de clase c , cuando mucho y cuando cumple para toda $a_i \in \mathfrak{G}$, este conjunto $\mathfrak{G}$ posee la característica *nil- c*.

V. CONCLUSIÓN.

Este ha sido un breve estudio relacionado con la importancia de las Series Centrales Inferiores y Superiores dentro del contexto de los Grupos Nilpotentes y la Supersolucionabilidad, como una base axiomática previa a la investigación de la Teoría de los Grupos Nilpotentes, que presenta 4 Teoremas que la describen, al Subgrupo de Frattini de un Grupo con sus 3 Teoremas y finalmente a los Grupos Supersolucionables con sus 8 Teoremas.

REFERENCIAS

- [1] Kuz'min, L. V; Latyshev, V. N.; Shmel'kin, A. L. (1990) *Encyclopaedia of Mathematics*. Vol. 6. An updated and annotated translation of the

Soviet Mathematical Encyclopaedia. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers and "Soviet Encyclopaedia" Publishing House.

- [2] Dieudonné, J. (1992) *Mathematics- The Music of Reason..* Berlin.: Springer-Verlag.
- [3] Jacobson, N. (1962) *Algebras*. New York: Interscience.
- [4] Kurosh, A. G. (1962) *The Theory of Groups. Vols. 1 y 2*. New York.: Chelsea Editions.
- [5] Kargapolov, M. I. ; Merzlyakov, Y. I. (1979) *Fundamentals of the Theory of Groups*. Berlin: Springer Verlag.
- [6] Hall, M. (1959) *The Theory of Groups*. New York.: MacMillan Company.
- [7] Baer, R. (1955) *Supersoluble groups*. USA: Proc. American Mathematical Society 6. pp. 16-32.

Teorema J2: algoritmo para solucionar ecuaciones cuárticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a partir de una resolvente cúbica.

Jaime William Flores Tecalco

Escuela Secundaria No.224 Huetzalin, C. Pino S/N, Guadalupe, Xochimilco, 16860 Ciudad de México, CDMX.

*Estudiante de Maestría, Universidad del Valle de México (UVM), Sadi Carnot 57, San Rafael, Cuauhtémoc, 06470 Ciudad de México, CDMX
william10_511@hotmail.com

Resumen- En este artículo se describe un algoritmo denominado J2 para solucionar ecuaciones cuárticas con raíces reales o complejas a partir de una resolvente cúbica propuesta por Ferrari.

Palabras clave- Algoritmo, ecuación cuártica, resolvente, sustituciones, raíces reales, raíces complejas.

Abstract- This article describes an algorithm called J2 to solve quartic equations with real or complex roots using a cubic solver proposed by Ferrari.

Keywords- Algorithm, quartic equation, solver, substitutions, real roots, complex roots.

Subject Classification: 11Axx

I. INTRODUCCIÓN

Def. 1.- Una función f se le llama polinomio si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes que se conocen como coeficientes del polinomio [1].

Def. 2.- Sea $P(x)$ un polinomio de la forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ con coeficientes reales se puede interpretar como una ecuación algebraica, llamada ecuación cuártica, de la forma: [2]

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

De tal manera que:

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d \quad (2)$$

Entonces se puede añadir $\frac{a^2}{4}x^2$ en ambos lados de la ecuación (2) para factorizar su primer miembro:

$$x^4 + ax^3 + \frac{a^2}{4}x^2 = -bx^2 - cx - d + \frac{a^2}{4}x^2 \quad (3)$$

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \quad (4)$$

En 1540, Lodovico Ferrari [2] [3], quién fue discípulo de Cardano [3] [4], abordó una idea fundamental en la resolución de ecuaciones cuárticas generales que reducen a trabajar con una ecuación cúbica, donde Ferrari la resuelve por el método de su maestro Cardano [2] [3].

Con la intención de obtener un cuadrado perfecto con una y indeterminada se añade a (4) en ambos miembros la expresión:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)y + \frac{y^2}{4} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 + \left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)y + \frac{y^2}{4} \\ = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d + \left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)y + \frac{y^2}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

Se reescribe (6):

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}ay - c\right)x + \left(\frac{1}{4}y^2 - d\right) \quad (7)$$

De la ecuación (7), fácilmente se observa una estructura algebraica que se puede interpretar como el cuadrado de una expresión lineal $sx + t$; $s, t \in \mathbb{R}$.

$$(sx + t)^2 = Ax^2 + Bx + C \quad (8)$$

$$s^2x^2 + 2stx + t^2 = Ax^2 + Bx + C \quad (9)$$

De (9) se obtienen las relaciones:

$$s^2 = A \quad (10)$$

$$2st = B \quad (11)$$

$$t^2 = C \quad (12)$$

Lo que implica que:

$$s = \sqrt{A} \quad (13)$$

$$t = \frac{B}{2\sqrt{A}} \quad (14)$$

Entonces de (10), (11) y (12) se satisface:

$$Ax^2 + Bx + C \rightarrow B^2 - 4AC = 0 \quad (15)$$

Por tanto, se relaciona (15) con (7):

$$\left(\frac{1}{2}ay - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{1}{4}y^2 - d\right) = 0 \quad (16)$$

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0 \quad (17)$$

La ecuación cúbica (17) se llama resolvente de la ecuación cuártica (1) [2], la cual es la implementación Ferrari en 1545 [3]. Se resuelve (17) para tomar el valor y de una raíz de ella, de preferencia una raíz positiva.

II. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO J2

Teorema J2.- Existencia de un algoritmo para solucionar ecuaciones cuárticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a partir de una resolvente cúbica.

Sea $P(x)$ un polinomio de la forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ con coeficientes reales (Def.2) y una resolvente $y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0$ (17). Entonces $\exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} | \alpha_1 = -\frac{a-\delta}{4}; \alpha_2 = -\frac{a+\delta}{4}; \beta_1 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} - \frac{\theta}{\delta}; \beta_2 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} + \frac{\theta}{\delta}$ con $\delta = \sqrt{a^2 + 4(y-b)} \wedge \theta = -c + \frac{1}{2}ay$ cuyas raíces están dadas por:

$$\begin{aligned} \phi \begin{cases} x_{1,2} = \alpha_1 \pm \sqrt{-\beta_1} \leftrightarrow \beta_1 \leq 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{R} \\ x_{1,2} = \alpha_1 \pm i\sqrt{\beta_1} \leftrightarrow \beta_1 > 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{C} \end{cases} \\ \psi \begin{cases} x_{3,4} = \alpha_2 \pm \sqrt{-\beta_2} \leftrightarrow \beta_2 \leq 0 \therefore x_{3,4} \in \mathbb{R} \\ x_{3,4} = \alpha_2 \pm i\sqrt{\beta_2} \leftrightarrow \beta_2 > 0 \therefore x_{3,4} \in \mathbb{C} \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Demostración: Sea $P(x)$ (Def.2) un polinomio de la forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 | a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$; entonces existe un algoritmo J2 (18), del cual $x_{1,2,3,4}$ sean soluciones de $P(x)$ ■.

Lema 1.- Independencia del Teorema J2.

Demostración: Si se relacionan las ecuaciones (7) y (8) se obtiene:

$$(sx + t)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}ay - c\right)x + \left(\frac{1}{4}y^2 - d\right) \quad (19)$$

Lo que implica:

$$(sx + t)^2 = \left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 \quad (20)$$

Entonces se divide (20) en dos ecuaciones cuadráticas:

$$sx + t = x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2} \quad (21)$$

$$-sx - t = x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2} \quad (22)$$

Se reescribe la ecuación (21):

$$x^2 + \frac{a}{2}x - sx + \frac{y}{2} - t = 0 \quad (23)$$

$$x^2 + \left(\frac{a}{2} - s\right)x + \left(\frac{y}{2} - t\right) = 0 \quad (24)$$

La ecuación (24) se trata de una ecuación cuadrática [5] donde se aplica el Teorema J1 [5] [6] obteniendo:

$$\alpha_1 = \frac{-\left(\frac{a}{2} - s\right)}{2} = -\frac{a - 2s}{4} \quad (25)$$

Al sustituir (13) en (25):

$$\alpha_1 = -\frac{a - 2\sqrt{A}}{4} \quad (26)$$

$$\alpha_1 = -\frac{a - 2\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}}{4} \quad (27)$$

$$\alpha_1 = -\frac{a - \sqrt{a^2 + 4(y-b)}}{4} \quad (28)$$

También se obtiene:

$$\beta_1 = -\alpha^2 + \left(\frac{y}{2} - t\right) \quad (29)$$

Al sustituir (14) en (29):

$$\beta_1 = -\alpha^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{B}{2\sqrt{A}}\right) \quad (30)$$

$$\beta_1 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} - \frac{-c + \frac{1}{2}ay}{\sqrt{a^2 + 4(y-b)}} \quad (31)$$

Se reescribe la ecuación (22):

$$x^2 + \frac{a}{2}x + sx + \frac{y}{2} + t = 0 \quad (32)$$

$$x^2 + \left(\frac{a}{2} + s\right)x + \left(\frac{y}{2} + t\right) = 0 \quad (33)$$

La ecuación (33) al tratarse de una ecuación cuadrática se aplica el Teorema J1 [5] [6] obteniendo:

$$\alpha_2 = \frac{-\left(\frac{a}{2} + s\right)}{2} = -\frac{a + 2s}{4} \quad (34)$$

Al sustituir (13) en (34):

$$\alpha_2 = -\frac{a + 2\sqrt{A}}{4} \quad (35)$$

$$\alpha_2 = -\frac{a + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}}{4} \quad (36)$$

$$\alpha_2 = -\frac{a + \sqrt{a^2 + 4(y-b)}}{4} \quad (37)$$

También se obtiene:

$$\beta_2 = -\alpha^2 + \left(\frac{y}{2} + t\right) \quad (38)$$

Al sustituir (14) en (38):

$$\beta_2 = -\alpha^2 + \left(\frac{y}{2} + \frac{B}{2\sqrt{A}}\right) \quad (39)$$

$$\beta_2 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} + \frac{-c + \frac{1}{2}ay}{\sqrt{a^2 + 4(y-b)}} \quad (40)$$

Se observa que en (28), (31), (37) y (40) se pueden hacer las siguientes sustituciones estratégicamente:

$$\delta = \sqrt{a^2 + 4(y-b)}; \delta \in \mathbb{R} \quad (41)$$

$$\theta = -c + \frac{1}{2}ay; \theta \in \mathbb{R} \quad (42)$$

Por tal motivo se obtienen las ecuaciones:

$$\alpha_1 = -\frac{a - \delta}{4} \quad (43)$$

$$\beta_1 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} - \frac{\theta}{\delta} \quad (44)$$

$$\alpha_2 = -\frac{a + \delta}{4} \quad (45)$$

$$\beta_2 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} + \frac{\theta}{\delta} \quad (46)$$

Y se sustituyen en (18): [5] [6]

$$x_{i,j} = \alpha \pm \sqrt{-\beta} \leftrightarrow \beta \leq 0 \therefore x_{i,j} \in \mathbb{R} \quad (47)$$

$$x_{i,j} = \alpha \pm i\sqrt{\beta} \leftrightarrow \beta > 0 \therefore x_{i,j} \in \mathbb{C} \quad (48)$$

Lo que al resolver de manera separada (α_1, β_1) y (α_2, β_2) se obtienen las cuatro raíces buscadas de (1)■.

Proposición 1.- Consistencia del Teorema J2 (18).

Sea $P(x)$ un polinomio de la forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ con coeficientes reales (Def.2) y una resolvente $y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0$, por Def. 2, es consistente porque $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \rightarrow resolvente \rightarrow$

$$\phi \begin{cases} x_{1,2} = \alpha_1 \pm \sqrt{-\beta_1} \leftrightarrow \beta_1 \leq 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{R} \\ x_{1,2} = \alpha_1 \pm i\sqrt{\beta_1} \leftrightarrow \beta_1 > 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{C} \end{cases} \rightarrow$$

$$\psi \begin{cases} x_{3,4} = \alpha_2 \pm \sqrt{-\beta_2} \leftrightarrow \beta_2 \leq 0 \therefore x_{3,4} \in \mathbb{R} \\ x_{3,4} = \alpha_2 \pm i\sqrt{\beta_2} \leftrightarrow \beta_2 > 0 \therefore x_{3,4} \in \mathbb{C} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2,3,4} \in \mathbb{R} \\ x_{1,2,3,4} \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Demostración: Por el operador Booleano lógico AND [7] se puede definir $P(x) = M$, el algoritmo J2 (18) como P y las raíces $x_{1,2,3,4}$ como Q [53 tesis]. Si $P(x) \rightarrow algoritmo \rightarrow x_{1,2,3,4}$ entonces cumple:

M	P	Q		M	P	M∧P
0	0	0		F	F	F
0	1	0		F	V	F
1	0	0		V	F	F
1	1	1		V	V	V

Fig. 1.- Tabla de operador AND [7].

Y por tanto, se cumple su consistencia■.

III. APLICACIÓN

A continuación se resuelven algunos ejemplos donde se aplica el algoritmo J2 (48).

Ejemplo 1.-

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

Resolvente

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0$$

$$y^3 - 35y^2 + 404y - 1540 = 0$$

$$y = 11$$

$$\delta = \sqrt{a^2 + 4(y - b)}$$

$$\delta = \sqrt{(-10)^2 + 4(11 - 35)}$$

$$\delta = 2$$

$$\theta = -c + \frac{1}{2}ay$$

$$\theta = -(-50) + \frac{1}{2}(-10)(11)$$

$$\theta = -5$$

$$\alpha_1 = -\frac{a - \delta}{4} = -\frac{(-10) - 2}{4}$$

$$\alpha_1 = 3$$

$$\beta_1 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} - \frac{\theta}{\delta} = -(3)^2 + \frac{11}{2} - \frac{-5}{2}$$

$$\beta_1 = -1$$

$$\alpha_2 = -\frac{a + \delta}{4} = -\frac{(-10) + 2}{4}$$

$$\alpha_2 = 2$$

$$\beta_2 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} + \frac{\theta}{\delta} = -(2)^2 + \frac{11}{2} + \frac{-5}{2}$$

$$\beta_2 = -1$$

$$x_{1,2} = \alpha_1 \pm \sqrt{-\beta_1} \leftrightarrow \beta_1 \leq 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{R}$$

$$x_{1,2} = \alpha_1 \pm \sqrt{-\beta_1} = 3 \pm \sqrt{1} = 3 \pm 1$$

$$x_{1,2} = \{2, 4\}$$

$$x_{3,4} = \alpha_2 \pm \sqrt{-\beta_2} \leftrightarrow \beta_2 \leq 0 \therefore x_{3,4} \in \mathbb{R}$$

$$x_{3,4} = \alpha_2 \pm \sqrt{-\beta_2} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1$$

$$x_{3,4} = \{1, 3\}$$

Ejemplo 2.-

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Resolvente

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0$$

$$y^3 + 5y^2 - 16y - 80 = 0$$

$$y = 4$$

$$\delta = \sqrt{a^2 + 4(y - b)}$$

$$\delta = 6$$

$$\theta = -c + \frac{1}{2}ay$$

$$\theta = 0$$

$$\alpha_1 = -\frac{a - \delta}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\beta_1 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} - \frac{\theta}{\delta} = -\frac{1}{4}$$

$$\alpha_2 = -\frac{a + \delta}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\beta_2 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} + \frac{\theta}{\delta} = -\frac{1}{4}$$

$$x_{1,2} = \alpha_1 \pm \sqrt{-\beta_1} \leftrightarrow \beta_1 \leq 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{R}$$

$$x_{1,2} = \alpha_1 \pm \sqrt{-\beta_1} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_{1,2} = \{1, 2\}$$

$$x_{3,4} = \alpha_2 \pm \sqrt{-\beta_2} \leftrightarrow \beta_2 \leq 0 \therefore x_{3,4} \in \mathbb{R}$$

$$x_{3,4} = \alpha_2 \pm \sqrt{-\beta_2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_{3,4} = \{-1, -2\}$$

Ejemplo 3.-

$$x^4 + 4x - 1 = 0$$

Resolvente

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0$$

$$y^3 + 4y - 16 = 0$$

$$y = 2$$

$$\delta = \sqrt{a^2 + 4(y - b)}$$

$$\delta = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = -c + \frac{1}{2}ay$$

$$\theta = -4$$

$$\alpha_1 = -\frac{a - \delta}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta_1 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} - \frac{\theta}{\delta} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_2 = -\frac{a + \delta}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta_2 = -\alpha^2 + \frac{y}{2} + \frac{\theta}{\delta} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \alpha_1 \pm i\sqrt{\beta_1} \leftrightarrow \beta_1 > 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{C}$$

$$x_{1,2} = \alpha_1 \pm i\sqrt{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}}$$

$$x_{1,2} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}} \right\}$$

$$x_{3,4} = \alpha_2 \pm \sqrt{-\beta_2} \leftrightarrow \beta_2 \leq 0 \therefore x_{3,4} \in \mathbb{R}$$

$$x_{3,4} = \alpha_2 \pm \sqrt{-\beta_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}}$$

$$x_{3,4} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{-\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}} \right\}$$

IV. CONCLUSIÓN

El Algoritmo J2 (18) es una alternativa que se puede utilizar en la resolución de ecuaciones cuárticas o de cuarto grado [2] con la ventaja que sus raíces están definidas tanto en los números reales $x_{1,2,3,4} \in \mathbb{R}$ como en los números complejos $x_{1,2,3,4} \in \mathbb{C}$. Se observa que los β (44) (46) juegan un rol muy importante, ya que dependiendo de su valor es como se va a definir el comportamiento de sus raíces (18).

Se observa que en la ecuación cúbica resolvente (17) propuesta por Ferrari [2] [3], se puede resolver por el método de preferencia o de acuerdo a la dificultad de la ecuación mencionada sin poner en riesgo los resultados finales, además, se sugiere el uso de la raíz positiva mayor para que a partir de (41) y (42) las operaciones no se realicen con numerosos pasos.

REFERENCIAS

- [1] Stewart, J. (2008) *Cálculo de una variable: Transcendentes tempranas*. México: Cengage Learning.
- [2] Uspensky, J.V. (1963) *Theory of equations*. USA: McGraw-Hill Inc.
- [3] Katz, V. (2008) *A History of Mathematics: An Introduction*. 3 ed., USA: PEARSON.
- [4] Flores, J. W. (2020) *Breve deducción de las fórmulas de Cardano a través del polinomio de Taylor*. Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos, No.3, julio-diciembre 2020, p.43. Ciudad de México, México.
- [5] Flores, J. W. (2023). *Descripción del algoritmo J1 para solucionar ecuaciones cuadráticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$* . Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos, No.8, enero-junio 2023, p.12. Ciudad de México, México.
- [6] Flores, J. W. (2021) *Descripción de la resolución de ecuaciones cuadráticas a través de la representación del vértice de su parábola*. Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos, No.5, julio-diciembre 2021, p.11. Ciudad de México, México.
- [7] Suppes, P. y Hill, S. (1988) *Primer curso de lógica matemática*. Barcelona: Editorial Reverté.

Programación y diseño de un modelo matemático de predictibilidad de manchas solares basado en machine learning mediante estacionalidad en series de tiempo ARIMA.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
fajardoensm@gmail.com

Resumen- El presente artículo propone el diseño de un modelo matemático que permita predecir el número de manchas solares hasta el año 2060 mediante machine learning utilizando un conjunto de datos estadísticos históricos para su entrenamiento con la técnica de predicción de series de tiempo ARIMA en para su posterior programación y pruebas en lenguaje Python.

Palabras Clave- modelado matemático, forecasting, series de tiempo, ARIMA, machine learning, manchas solares.

Abstract- This article paper proposes the design of a mathematical model to predict the number of sunspots up to the year 2060 by machine learning using a set of historical statistical data for training with the ARIMA time series prediction technique with a programming and testing using Python language.

Keywords- mathematical modeling, forecasting, time series, ARIMA, machine learning, sunspots.

Mathematical Subject Classification: 37M10,37-04.

I. INTRODUCCIÓN

El sol era considerado por varias culturas como un dios debido a la importancia que tiene el mismo en la existencia de la vida orgánica; incluso actualmente es dependiente del Sol toda la tecnología de energía basada en sistemas artificiales fotovoltaicos como los satélites; e incluso en la hipotética existencia de organismos robóticos autónomos extraterrestres requerirían de las condiciones de temperatura para poder llevar a cabo operaciones cinéticas o la dependencia gravitatoria.

Las manchas solares son áreas donde en ocasiones el campo magnético es 2,500 veces mayor al de la Tierra[1]; lo que provoca un incremento en la presión magnética, un decremento en la presión atmosférica alrededor de éste y por lo tanto un decremento en la temperatura en relación con su entorno debido a que la concentración del campo magnético inhibe el flujo de gas nuevo y provoca que se caliente desde el interior del Sol hacia su superficie[2].

Las manchas solares suelen formarse en parejas cuyos campos magnéticos apuntan en direcciones opuestas; una mancha solar normal y su tamaño promedio es aproximadamente el mismo que el de la Tierra[3].

Las estadística en observación de manchas solares comenzó en Observatorio de Zurich en 1749 y el descubrimiento de que el sol presentaba un comportamiento cíclico fue descubierto por *Heinrich Schwabe* en 1843; confirmando el descubrimiento *Rudolf Wolf* y estableciendo una periodicidad en 11 años[4].

Autores como *Hathaway* y *Reichmann*[5] han intentado relacionar el ciclo en las manchas solares con las perturbaciones magnéticas de la atmósfera terrestre que generarían fenómenos cíclicos en la Tierra como son el aumento o decremento de temperatura, lluvia, sequía, longitud del día, carbono 14, crecimiento en los anillos de los árboles y otros más como los conflictos históricos en la humanidad[6][7].

Los ciclos solares se estiman según diversos autores en un periodo de 9 a 13 años con una media de 11 años con máximos y mínimos[8].

Consecuencia de los efectos climáticos que pueden ocasionar las manchas solares y el campo magnético es la afectación de la tecnología humana (diseñada para trabajar sólo bajo las condiciones estándar de la Tierra); sobre todo las susceptibles a los pulsos electromagnéticos (PEM)[9][4] como la electrónica de silicio o la que depende del estado de la ionosfera como las comunicaciones basadas en satélites, GSM/GPRS entre otros y los servicios front-end dependientes.

El cálculo de la predicción de fenómenos naturales modelados como sistemas dinámicos basado en modelos matemáticos es muy extenso y se puede mencionar como punto medular a *Birkhoff* [10] con la *teoría topológica* y la *teoría ergódica*[11]; ésta última para estudiar las propiedades en el comportamiento de las medias temporales en funciones durante el tiempo en un sistema dinámico, proponiendo que las ecuaciones que producen la dinámica de comportamiento se encuentran filtradas de ruido, por lo que la *ergodicidad*[10] implica que un punto habrá estado en todas las partes de un espacio sobre el que se mueve el sistema mediante una trayectoria uniforme, unidireccional y aleatoria, por lo que se puede predecir el comportamiento promedio del sistema a través del análisis de una muestra aleatoria grande que sea

representativa de las propiedades estadísticas promedio del proceso de la trayectoria del punto. La *teoría ergódica*[10], al igual que la teoría de la probabilidad se basa en nociones generales de la *teoría de la medida*[12]. Su desarrollo inicial estuvo motivado por problemas de física estadística; sobre esta división se han incorporado recientemente las teorías de *grupos de transformación topológicos y de estabilidad estructural dentro del marco de la topología diferencial* [13] y se ha extendido en modelos de búsqueda y modelos de caos ergódico[14][15].

Todos los modelos anteriores serían demasiado complejos de comprobar sin el uso de cómputo automático y la programación de métodos numéricos con el uso de machine learning aplicado a series temporales que permite iterar distintas combinaciones y su comparación para realizar una aproximación basada en heurística aplicando el uso de medias móviles con capacidad de regresión automática para lograr un aprendizaje y lograr sistemas que puedan predecir con mayor certeza un fenómeno basado en el comportamiento histórico de las señales que marcan los ciclos de tiempo.

II. METODOLOGÍA

Se utilizará la metodología de desarrollo rápido de aplicaciones o RAD (Rapid Application Development)[7] la cual es una de las más utilizadas actualmente.

Las fases de desarrollo del sistema utilizando la metodología del sistema RAD fueron el análisis de requerimientos del sistema para diseñar un prototipo; siendo el modelo y algoritmo en un ciclo iterativo de versiones sometidas a pruebas hasta lograr las funciones requeridas para ser implementado partiendo de los valores del presente hasta el año 2060 del número de manchas solares, la construcción del modelo *ARIMA*[17], su demostración y constante refinamiento hasta que sea estable y lograr pruebas de simulación en el lenguaje *Python* mediante *Anaconda-Spyder*.

III. MODELOS ESTACIONALES Y FUNCIONES DE PREDICCIÓN.

A) Series de tiempo

Una serie de tiempo es: *a series of observations x^t , observed over a period of time* [19]. Las observaciones son durante un intervalo y muestreadas aleatoriamente mediante distintas técnicas en un intervalo o en momentos de tiempo t .

Las observaciones en momentos de tiempo t deben ser equidistantes y determinadas, en el caso de los datos históricos de las manchas solares serán un promedio mensual de modo que:

$$\{x^t: t \in \mathbb{Z}\} \mid (\mathbb{Z} = \{\dots, 0, 1, 2, \dots\}).$$

Una serie de tiempo es distinta a una estadística clásica en la existencia de una dependencia en las observaciones [19] lo cual permite obtener predicciones y patrones.

Filtrar una serie de tiempo es el proceso de transformación de los datos para resaltar algunas características o eliminar las no deseadas para su fácil análisis [17].

Sea $\{X^t\}$ una serie de tiempo y $\{Y^t\}$ su transformación donde $\{h_j\}$ son los pesos la transformación es:

$$Y^t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j X_{t-j}$$

En las series de tiempo el objetivo principal es comprender y modelar la relación entre las observaciones en donde μ_t es la media subyacente y ε_t son los residuos (errores)[20] que la media no puede explicar o bien $E[Y_t] = \mu_t$ de modo que:

$$Y^t = \mu_t + \varepsilon_t$$

Los represores en las series de tiempo son variables exógenas [21].

Por lo general los son generados utilizando un modelo paramétrico siendo este un modelo en el que se supone que se conocen todos los parámetros [22].

B) Estacionalidad en las series de tiempo:

La estacionalidad es una característica de una serie temporal en la que los datos experimentan cambios regulares y predecibles que se repiten cada año. Toda fluctuación o pauta previsible que se repite a lo largo de un año se considera estacional[23].

Se dice que una serie de tiempo es estacionaria si su media y la varianza son constantes a lo largo del tiempo[17]. Para un proceso multivariante, la estacionalidad de una serie temporal $\vec{y}_t$ cumple si $E[\vec{y}_t] = [\vec{\mu}]$ es un vector de constantes donde:

$$\vec{y}_t = [\vec{Y}_t] - [\vec{\mu}] \quad (1)$$

C) Modelo Vector Auto Regresivo (VAR)

El modelo vectorial auto regresivo (VAR) [23] es un modelo dinámico multivariantes de series temporales independiente que consiste en construir una ecuación que hace de cada variable endógena genere una función de sus propios valores anteriores y de los valores anteriores de todas las demás variables endógenas.

Un modelo vectorial auto regresivo estable p rezagado $[VAR(p)]$ tiene las siguientes características[23]:

$$\vec{y}_t = \overrightarrow{\phi_1 y_{t-1}} + \overrightarrow{\phi_2 y_{t-2}} + \dots + \overrightarrow{\phi_p y_{t-p}} + \vec{\varepsilon}_t \mid t = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2)$$

Donde $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{kt}, \dots)'$ es un vector $(k \times 1)$ de series de tiempo variable, ϕ_j las matrices de coeficientes fijos $(k \times k)$, un proceso de ruido blanco $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{kt})'$ es un vector aleatorio continuo que satisface $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon') = \Sigma_\varepsilon$ y a $E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon') = 0 \mid s \neq t \in (k \times 1)$ denominado también como proceso de cambio[21] o innovación[23].

D) Proceso estocástico lineal estacionario

Un proceso estocástico lineal estacionario que carece de componentes determinísticos univariantes para un proceso de series temporales vectoriales estables puramente no deterministas[23] justificado mediante el método de coeficientes indeterminados[21], de modo que sea un proceso autorregresivo vectorial finito de orden p $[VAR(p)]$ representado como un proceso de media móvil vectorial infinito (VEMA) de acuerdo con el teorema de descomposición de Wold (W_t)[24] como cualquier modelo estacionario discreto puede representarse a partir de esta descomposición en donde si $\{\vec{Y}_t\}$ es un proceso estacionario no determinista con vector de media $\vec{\mu}$; entonces $\vec{Y}_t - \vec{\mu}$ puede representarse como una combinación lineal de vectores de retraso ponderado de ruido blanco siendo:

$$\begin{aligned}\vec{Y}_t - \vec{\mu} &= \vec{\varepsilon}_t + \vec{\psi}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_{t-1} + \vec{\psi}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \vec{\psi}_j \cdot \vec{\varepsilon}_{t-j} \mid \vec{\psi}_0 = \vec{I}\end{aligned}\quad (3)$$

Sea $\vec{y}_t = \vec{Y}_t - \vec{\mu}$ el modelo de Wold [24] (W_t) denotado como:

$$\vec{W}_t = \vec{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{\psi}_j \cdot \vec{\varepsilon}_{t-j} = \vec{\psi}(B) \cdot \vec{\varepsilon}_t \quad (4)$$

Donde:

$\vec{\psi}(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{\psi}_j B^j$ es una matriz ($k \times k$) como $B^j \vec{\varepsilon}_t = \vec{\varepsilon}_{t-j}$.

$\vec{y}_t$ es un vector aleatorio ($k \times 1$).

$\vec{\psi}_j$ son matrices ($k \times k$) de coeficientes fijos.

$\vec{\varepsilon}_{t-j}$ es un vector ($k \times 1$) de ruido blanco con retardo j .

$\vec{\varepsilon}_{t-j}$ es un proceso de ruido blanco k -dimensional[24] de cambio o innovación[23].

E) Predictibilidad

Sea ε_t un vector de ruido blanco; el modelo *Vector Moving Average Model* (VEMA) de orden q es un proceso de media móvil vectorial para series de tiempo $\{y_t\}$ denotado como $VEMA(q)$ que puede representarse como[20]:

$$\vec{y}_t = \vec{\varepsilon}_t + \vec{\psi}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_{t-1} + \dots + \vec{\psi}_q \cdot \vec{\varepsilon}_{t-q}$$

Pudiendo reescribirse como:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}(B) &= ([\vec{\psi}_j \cdot (B)] + [\vec{\phi}_2 \cdot B^2] + [\vec{\phi}_q \cdot B^q]) = \\ &= \sum_{j=1}^q \vec{\psi}_j \cdot (B^j) \cdot \vec{\psi}_j \mid \vec{\psi}_j = \vec{I}\end{aligned}\quad (5)$$

Mientras que el modelo $VEMA(q)$ (5) es finito el modelo de Wold [24] (4) es infinito[19].

Vector Autoregressive Model (VAM) de orden p es un proceso de media móvil que puede ser representada como:

$VAR(p)$ estacionaria similar a (2)[20]:

$$\begin{aligned}\vec{y}_t &= \vec{\phi}_1 \vec{y}_{t-1} + \vec{\phi}_2 \vec{y}_{t-2} + \dots + \vec{\phi}_p \vec{y}_{t-p} + \vec{\varepsilon}_t \\ &= \sum_{j=0}^p \vec{\phi}_j \cdot \vec{y}_{t-j} \mid \vec{\phi}_j = \vec{I}\end{aligned}\quad (6)$$

Utilizando (3), (4) y (5) se obtiene:

$$\Rightarrow \vec{\phi}(B) \cdot \vec{y}_t = \vec{\varepsilon}_t \quad (7)$$

$$(\vec{I} - [\vec{\phi}_1 \cdot (B)] - [\vec{\phi}_2 \cdot B^2] - [\vec{\phi}_p \cdot B^p]); B^K \vec{y}_t = \vec{y}_{t-K} \quad (8)$$

La expresión (8) describe que un proceso $VAR(p)$ puede representarse como un proceso $VEMA(q)$ infinito[19].

El modelo de Wold[24] (W_t) indica que cualquier proceso estacionario puede representarse como una combinación lineal de procesos de ruido blanco vectorial con retardo[24].

Teniendo un proceso estacionario $VAR(p)$ representado como (6) que da lugar a la ecuación (7).

A partir de la ecuación (7) se puede escribir:

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon}_t &= \vec{\phi}(B) \vec{y}_t = \vec{\phi}(B) \vec{\psi}(B) \vec{\varepsilon}_t; \\ \frac{\vec{\phi}(B) \vec{\psi}(B)}{2} &= \vec{I}\end{aligned}\quad (9)$$

Utilizando(5) se obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}(B) &= \sum_{j=1}^q \vec{\psi}_j \cdot (B^j) \Rightarrow \vec{\phi} \cdot (B) \sum_{j=1}^q \vec{\psi}_j \cdot (B^j) = \vec{I} \Rightarrow \\ &[(1 - \vec{\phi}_1 \cdot (B)) - (\vec{\phi}_2 \cdot (B^2)) - \dots - (\vec{\phi}_p \cdot (B^p))] \sum_{j=1}^q \vec{\psi}_j \cdot (B^j) = \vec{I}\end{aligned}\quad (10)$$

Por lo que con un $VAR(p)$ y $\vec{\psi}_j$ ($j=0,1,3,\dots$) pueden obtenerse fácilmente igualando los coeficientes de potencias similares de B s en ambos lados de (10).

Dado que los $\vec{\phi}_j$ son la matriz de coeficientes del modelo multivariante $VAR(p)$; los $\vec{\psi}_j$ pueden obtenerse fácilmente por el método de los coeficientes indeterminados.

Estos $\vec{\psi}_j$ son los coeficientes de un proceso VEMA infinito representado como:

$$\vec{y}_t = \vec{\varepsilon}_t + \vec{\psi}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_{t-1} + \vec{\psi}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_{t-1} + \dots \quad (11)$$

Esto significa que un proceso $VAR(p)$ puede convertirse en un proceso VEMA infinito que no es otra cosa que la representación W_t (3)(4)[23].

F) Pronóstico inesgado

Definición 1

Sea:

Pe : Pendiente de predicción exacta.

Lr : Línea regresiva.

R : Realizaciones

$\bar{R}$: Realización promedio

P : Predicciones

$\bar{P}$: Predicción promedio

$\bar{P}c$: Predicción promedio corregida

E : Punto medio

Ec : Punto medio corregido

Ep : Error de la pendiente

De acuerdo con Mincer y Zarnowitz: "Un pronóstico es inesgado si el punto de predicción se encuentra sobre Pe ; es decir que $E(P) = E(A)$. La diferencia $E(A) - E(P) = E(u)$ mide la magnitud del sesgo. ...la inesgadez es una característica deseable en un pronóstico pero no implica exactitud el mismo"[25].

Por lo anterior la importancia de que los modelos cuenten con la característica de la inesgadez. La figura 1 describe la relación de las variables anteriores respecto pronóstico de inesgado.

Definición 2.

Sea t el origen de un pronóstico temporal y l el tiempo de espera (lag)[23]. El pronóstico se centra en encontrar un vector $\vec{y}_{t+l}$ ($l \geq 1$) cuando se encuentre en el tiempo t .

Utilizando (11) se puede obtener el valor a pronosticar pudiendo definirse como:

Sea $\vec{\varepsilon}_t$ un vector de ruido blanco y $E|\vec{\varepsilon}_t| = 0$; $\vec{y}_{t+l}$

$$\vec{y}_{t+l} = \vec{\varepsilon}_{t+l} + \vec{\psi}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_{t+l-1} + \vec{\psi}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_{t+l-2} + \dots \quad (12)$$

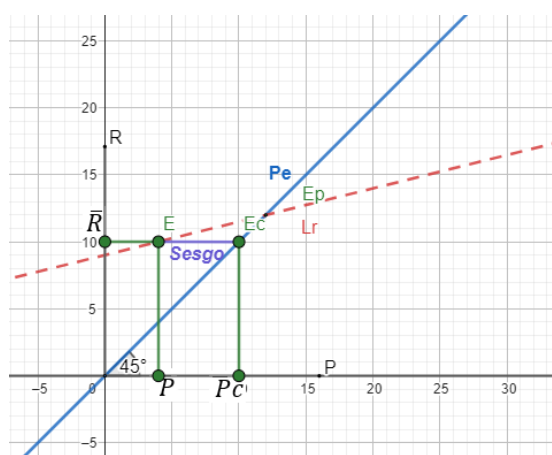


Fig 1. Diagrama Predicción-Realización

Y su mejor predicción $\vec{y}_{t(l)}$ será:

$$\vec{y}_t(l) = E[\vec{\varepsilon}_{t+h} | \vec{y}_t, \vec{y}_{t-1}, \dots] = \vec{\psi}_l^* \cdot \vec{\varepsilon}_t + \vec{\psi}_{l+1}^* \cdot \vec{\varepsilon}_{t-1} + \vec{\psi}_{l+2}^* \cdot \vec{\varepsilon}_{t-2} + \dots \quad (13)$$

$$\rightarrow \vec{y}_t(l) = \sum_{j=l}^{\infty} \vec{\psi}_j^* \cdot \vec{\varepsilon}_{t-l-j} \quad (14)$$

Demostración del pronóstico insesgado

La demostración del pronóstico insesgado se basa en el hecho de que un proceso VAR estacionario puede representarse como un proceso VEMA infinito.

Dado que $\vec{y}_{t+l}$; $\vec{y}_t(l)$ son combinaciones lineales de $\vec{\varepsilon}_t$ s y $\vec{\varepsilon}_t(l)$ [19]; la predicción del error para el lag l también será una combinación lineal $\vec{\varepsilon}_t$ s; es decir:

$$\vec{\varepsilon}_t(l) = \vec{\varepsilon}_{t+l} + \vec{\psi}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_{t+l-1} + \vec{\psi}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_{t+l-2} + \dots + \vec{\psi}_{l-1} \cdot \vec{\varepsilon}_{t+1} \quad (15)$$

Utilizando (12) (13) la media aritmética de la predicción es:

$$E[(\vec{y}_{t+l} - \vec{y}_t(l))(\vec{y}_{t+l} - \vec{y}_t(l))'] = \vec{\Sigma}_{\varepsilon} + \vec{\psi}_1 \cdot \vec{\Sigma}_{\varepsilon} \cdot \vec{\psi}_1' + \vec{\psi}_2 \cdot \vec{\Sigma}_{\varepsilon} \cdot \vec{\psi}_2' + \dots + \vec{\psi}_{l-1} \cdot \vec{\Sigma}_{\varepsilon} \cdot \vec{\psi}_{l-1}' + \sum_{j=0}^{\infty} [(\vec{\psi}_{l+j} - \vec{\psi}_{l+j}^*) \cdot \vec{\Sigma}_{\varepsilon} \cdot (\vec{\psi}_{l+j} - \vec{\psi}_{l+j}^*)'] \quad (16)$$

Lo anterior es simplificado mediante $\vec{\psi}_{l-j} - \vec{\psi}_{l+j}^*$. Dado que la varianza del error de predicción ha alcanzado el mínimo; entonces el lag l será:

$$\begin{aligned} \vec{y}_{t+l} &= \vec{\varepsilon}_{t+l} + \vec{\psi}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_{t+l-1} + \vec{\psi}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_{t+l-2} + \dots + \vec{\psi}_{l-1} \cdot \vec{\varepsilon}_{t+1} \\ &\quad + \vec{\psi}_l^* \cdot \vec{\varepsilon}_t + \vec{\psi}_{l+1}^* \cdot \vec{\varepsilon}_{t-1} + \vec{\psi}_{l+2}^* \cdot \vec{\varepsilon}_{t-2} + \dots \\ \rightarrow \vec{y}_{t+l} &= \vec{\varepsilon}_t(l) + \vec{y}_t(l) | [\vec{\varepsilon}_t(l)] = 0 \blacksquare. \end{aligned} \quad (17)$$

Es decir la predicción (17) es de pronóstico es insesgado.

IV. MODELO ESTACIONAL CON FUNCIÓN DE PREDICCIÓN MEDIA MÓVIL AUTORREGRESIVA INTEGRADA (ARIMA).

Definición 3

Sea un polinomio de convergencia infinita $\vec{\psi}(l) = 1 + \vec{\psi}_1(l) + \vec{\psi}_1(l)^2 + \dots$ sobre los operadores anteriormente descritos lag l y el vector estocástico de ruido blanco $\vec{\varepsilon}_t$, utilizando el modelo de Wold [24] descrito en (3) y (4); un proceso estocástico estacionario lineal sin componentes determinísticos $\vec{\varepsilon}_t$ puede ser descrito como:

$$\vec{\varepsilon}_t = \vec{\psi}(l) \cdot \vec{\varepsilon}_t \quad (18)$$

Definición 4:

Los parámetros p, q, d de los modelos siguientes se definen del siguiente modo:

p : El número de observaciones precedentes [17] con retardo (lag) l [17] incluidas en el modelo [17]. Utilizando técnicas en la base de datos en Python como la prueba de la raíz unitaria *Adfuller* (*Augmented Dickey-Fuller*) o *ADF* [26] se puede saber si el modelo de la serie temporal es estacionario o no [17]. Dado que una hipótesis nula asume la presencia de una raíz unitaria; es decir un $\alpha = 1$. El valor p o términos *auto regresivos* (AR) a obtener deberá ser superior al nivel de significación ($p > 0.05$) para que sea estacionaria la serie. Python también cuenta con el gráfico *PACF* que realiza la *Función de Auto Correlación Parcial* entre la serie temporal y su retardo (lag) l para encontrar los l innecesarios en la AR [17]; por lo que una correlación significativa en una serie temporal estacionaria se modela incorporando el orden de los términos AR para ser igual a los l que pueden cruzar la zona del gráfico con significancia [17].

d : El número de veces que las observaciones brutas son diferenciadas (*grado de diferencia*) [17], con lo cual técnicas iterativas de programación permitirán desarrollar de forma automatizada su valor.

El valor d debe lograr que la serie de tiempo de vuelta estacionaria [17]; mientras que en una diferenciación de primer orden puede existir menos ruido y conforme se va diferenciando en siguientes órdenes puede haber un aumento en el ruido [19]; Python proporciona mediante *Pandas* el comando *.diff()* para su realización.

q : El tamaño de la ventana de la media móvil (*orden de media móvil*) [17]; siendo q el número de errores de retraso (lag) l en la ecuación de predicción [17]. Para averiguar el valor de q se puede utilizar una auto correlación que indica cuánta media móvil se requiere para eliminar la autocorrelación de la serie temporal estacionaria como la gráfica de *Función de Auto Correlación ACF* [22] en Python.

Definición 5

Aproximando el polinomio mediante la razón de dos polinomios de orden finito se obtiene la representación denominada *Media Móvil Autorregresiva* o *Auto Regressive Moving Average* (ARMA) [17] compuesta por el módulo *Regresión automática* (AR) [17] siendo un modelo que muestra una variable que permite retroceder a sus valores anteriores y un módulo de *Promedio móvil* (MA) [17] que contiene la dependencia entre una observación respecto a un error residual de un modelo de media móvil con el parámetro (q) descrito anteriormente en observaciones con lag l [17]. Descrita como [17]:

$$\phi(l) \cdot \vec{\kappa}_t = \theta(l) \cdot \vec{\varepsilon}_t | \vec{\psi}(l) = [\phi(l)]^{-1} \cdot \phi(l) \quad (19)$$

Definición 6

Sea $\vec{E} = 1 - l$ el operador de diferencia regular estacional, $\vec{E}_s = 1 - l^s$ el operador de la diferencia estacional de la serie, y $\vec{\mu}$ el vector de un polinomio del tiempo de orden finito $m - 1$ [17].

Si a la serie estacionaria s a trabajar E se le aplica el modelo W_t [24] (3) y (4) de forma $W_t = E \cdot E_s \cdot \vec{\kappa}_t - \vec{\mu}(t)$; el modelo resultante de $\vec{\kappa}_t$ es la *Media Móvil Autorregresiva Integrada* o *Auto Regressive Integrated Moving Average (ARIMA)* [17] que incluye los módulos *AR* y *MA* anteriores [17]; incorporando un módulo *Integrado (I)* que representa la diferenciación con el parámetro (d) [17] descrito anteriormente de las observaciones no procesadas, logrando la estacionariedad de la serie temporal mediante el remplazo de la diferencia entre los valores de los datos y los valores anteriores de los datos. [17] El modelo ARIMA se describe como [17]:

$$(\phi_p(l) \cdot \phi_p(l^s)) \cdot (E^d \cdot E_s \cdot \vec{\kappa}_t - \vec{\mu}(t)) = \theta_q(l) \cdot \beta_q(l^s) \cdot \vec{\varepsilon}_t \quad | \quad d \in \mathbb{Z}; m = 1 \leftrightarrow \vec{\mu} = p \text{ (constante)}. \quad (20)$$

Así mismo [17] $\varphi_r(l) = \phi_p(l) \cdot \phi_p(l^s) \cdot E^d \cdot E_s$; $r = p + d + s(1 + P)$; $\theta_m^*(l) = \theta_q(l) \cdot \beta_q(l^s)$; $p = q + s \cdot Q$; $c = \phi_p(l) \cdot \phi_p(l^s) \cdot \vec{\mu}(h)$; la predicción $\vec{\kappa}_{t+h}$ desde un tiempo de origen t viene dada por:

$$\vec{\kappa}_t(h) = \sum_{i=1}^r \varphi_i \cdot \vec{\kappa}_t(h - i) + \sum_{j=1}^v \theta_j^* \cdot \vec{\varepsilon}_{t+h-j} + c \quad (21)$$

Coincidiendo las predicciones $\vec{\kappa}_t(h - i)$ con los valores observados cuando el horizonte es negativo; así mismo las perturbaciones son nulas si $h > j$ e idénticas a los valores estimados si $j \geq h$. Para $h > p$ la parte *Móvil Autorregresiva (MA)* [17] del modelo no tendrá efecto en el pronóstico [17].

Así mismo para un horizonte temporal lejano se puede obtener una función de pronóstico eventual [17]:

$$\vec{\kappa}_t(h) = \varphi_r \cdot \vec{\kappa}_t(h - 1) + \dots + \varphi_r \cdot \vec{\kappa}_t(h - r) + c \quad (22)$$

Teorema 1:

Solución general de la función de predicción ARIMA.

Sea $\vec{\psi}_1(l) = 1 + \vec{\psi}_1(l) + \dots + \vec{\psi}_k(l)^k$ un vector que describe un polinomio finito en el operador lag l factorizable en: $\vec{\psi}_1(l) = \vec{P}(l) \cdot \vec{Q}(l) | \vec{P}(l), \vec{Q}(l) | P, Q \in p = p \cdot 1$.

Además: $\exists \vec{Z}_t = \vec{p}_t + \vec{q}_t | P(l) \cdot p_t = Q(l) \cdot q_t = 0$.

Demostración de la función de predicción ARIMA:

Al utilizar conmutatividad de los operadores de la ecuación (18); ésta permitió dar solución Al modelo ARIMA [17] (20) y ser condición suficiente siendo:

$$\begin{aligned} \vec{P}(B) \cdot \vec{Q}(B) \cdot \vec{Z}_t &= \vec{P}(B) \cdot \vec{Q}(B) \cdot (\vec{p}_t + \vec{q}_t) = \\ \vec{Q}(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot \vec{p}_t &+ (\vec{P}(B) \cdot \vec{Q}(B) \cdot \vec{q}_t) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

La demostración de que la condición es necesaria parte de que cualquier solución de la ecuación (18) puede escribirse como en la ecuación modelo ARIMA [17] (20). Mediante el teorema de Bezout [27] se pueden obtener dos polinomios $\vec{W}_1, \vec{W}_2$:

$$\vec{P}(B); \vec{Q}(B) \in p = p \cdot 1 \Rightarrow \exists (\vec{T}_1(B); \vec{T}_2(B))$$

Siendo:

$$\begin{aligned} 1 &= (\vec{T}_1(B) \cdot \vec{P}(B)) + (\vec{T}_2(B) \cdot \vec{Q}(B)) \\ \therefore \vec{Z}_t &= (\vec{T}_1(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot \vec{Z}_t) + (\vec{T}_2(B) \cdot \vec{Q}(B) \cdot \vec{Z}_t) \end{aligned}$$

Obteniendo para cada uno de los componentes:

$$\vec{T}_1(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot \vec{Z}_t = \vec{q}_t \quad (24)$$

$$\vec{T}_2(B) \cdot \vec{Q}(B) \cdot \vec{Z}_t = \vec{p}_t \quad (25)$$

$$\therefore \vec{Z}_t = \vec{q}_t + \vec{p}_t \quad (26)$$

Multiplicando (24) y (25) por los polinomios $\vec{P}(B)$ y $\vec{Q}(B)$ respectivamente se obtiene:

$$\vec{Q}(B) \cdot \vec{q}_t = \vec{T}_1(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot \vec{Q}(B) \cdot \vec{Z}_t = 0 \quad (27)$$

$$\vec{P}(B) \cdot \vec{p}_t = \vec{T}_2(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot \vec{Q}(B) \cdot \vec{Z}_t = 0 \blacksquare \quad (28)$$

(27) y (28) demuestran que cualquier solución puede ser escrita de forma del modelo ARIMA [17] (20) y (21) descrita en el teorema 1.

Corolario:

$\therefore \vec{Z}_t = \vec{q}_t + \vec{p}_t$ en términos de la ecuación (21) será:

$$\begin{aligned} \vec{q}_t &= (\vec{T}_1(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot \vec{q}_t) + (\vec{T}_2(B) \cdot \vec{Q}(B) \cdot \vec{q}_t) = \\ \vec{T}_1(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot \vec{q}_t &= \vec{T}_1(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot (\vec{q}_t + \vec{p}_t) \\ &= \vec{T}_1(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot (\vec{q}_t + \vec{p}_t) \\ &= \vec{T}_1(B) \cdot \vec{P}(B) \cdot \vec{q}_t \\ &= (1 - \vec{T}_2(B) \cdot \vec{Q}(B)) \cdot \vec{q}_t = \vec{q}_t \end{aligned}$$

Similarmente queda demostrado que $\vec{p}_t$ es idéntico a $\vec{p}_t$.

V. ALGORITMO DE PREDICTIBILIDAD DE MANCHAS SOLARES BASADO EN MACHINE LEARNING MEDIANTE ESTACIONALIDAD EN SERIES DE TIEMPO ARIMA.

Utilizando el modelo ARIMA [17] (20) y los componentes definidos en la sección anterior se puede desarrollar un algoritmo a programar utilizando las funciones, gráficos y módulos proporcionados por Python.

A) Dataset.

La base de datos (*dataset*) cuenta con 3299 registros en formato .csv de trabajo se basa en la información proporcionada por el *World Data Center WDC-SILSO Royal Observatory of Belgium* en su sitio <https://www.sidc.be/SILSO/INFO/> [24] como se muestra en la figura 2.

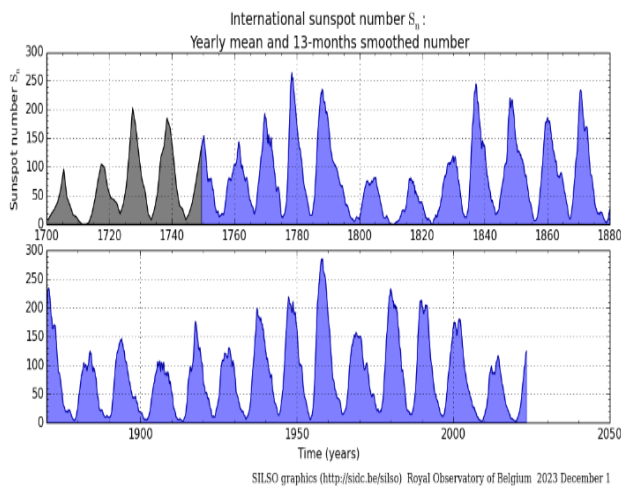


Fig 2. Gráfica histórica del promedio anual de manchas solares desde 1749 y número mensual de manchas solares a 13 meses (azul). La gráfica describe desde enero de 1700 hasta diciembre de 2023. Fuente: World Data Center WDC-SILSO Royal Observatory of Belgium.

B) Machine learning

El “machine learning” (aprendizaje máquina) es un término creado por Arthur Samuel en 1959 el cual lo describe como: “*Field of study that gives computers the ability to learn without being explicitly programmed*”[29]; así mismo Tom Mitchell la define como: “*A computer program is said to learn from experience E with respect to some class of tasks T and performance measure P , if its performance at task in T , as measured by P , improves with experience E* ”[30].

Por lo que un sistema inteligente con machine learning (ML) cuya tarea T es la generación de una correcta serie de tiempo mediante el modelo ARIMA (20) con un sistema de retroalimentación intentaría formar la serie de tiempo fallando.

“...pero aproximándose en cada intento obteniendo una experiencia E respecto a cada intento que es almacenado como datos en la memoria; el desempeño P es evaluado con el resultado deseado incrementándose en cada intento aproximándose cada vez más al máximo desempeño al repetir la tarea T n veces; por lo que al incrementar la experiencia E , también será el desempeño P , logrando una mayor precisión ante la tarea T ”[31].

Los algoritmos de entrenamiento supervisados requieren el uso de un patrón de comportamiento (serie de tiempo)[32] adecuado en presencia de entradas específicas. Ejemplos de entrenamiento supervisado son el perceptrón[33] y delta[34].

Basado en lo anterior se utilizará la información histórica recolectada de manchas solares aplicando a un subconjunto de 2969 que equivalen al 89.996% de datos totales para el proceso de entrenamiento y el subconjunto de 330 datos que equivalen al 10.003% restante para una validación adecuada[32].

Como se puede observar en la figura 2 del WDC-SILSO [28] se puede encontrar que si cuenta con una estacionalidad entre 9 a 13 años con máximos y mínimos con registros como el de 1958 o mínimos como el periodo de 1645 a 1715.

Scikit-learn es una librería para Machine Learning que incluye algoritmos de aprendizaje como evaluación, diagnóstico, validaciones cruzadas, clasificación, extracción de características, regresiones, agrupaciones, reducción de dimensiones, selección de modelos y preprocesamiento.

Statsmodels es otra librería centrada en modelos estadísticos para análisis predictivos y exploración;

específicamente se utilizará la técnica de suavizado exponencial Holt-Winters [36] con tendencia y componente estacional aditivo para un entrenamiento por estimación recursivo a partir de la serie de tiempo histórica mediante el análisis de la tendencia y la constante estacional multiplicativa de 9-13 años como se observó anteriormente.

Por último para evaluar el rendimiento del modelo se utilizará la librería Sklearn-metrics.

El aprendizaje y el modelo ARIMA(20)[17] en conjunto con las técnicas de selección de valores intentará predecir el comportamiento al menos al año 2060; ya que Newton había vaticinado ese año como el fin de los tiempos.

C) Algoritmo de predictibilidad de manchas solares. El algoritmo es descrito en el diagrama de flujo de la figura 3.

Se comienza con la declaración de variables de trabajo descritas en la definición 4 p, q, d entre otras para el modelo ARIMA (20)[17] y las librerías descritas anteriormente: Tsaplots, Pandas, Numpy, Seaborn, Arima.model, Holtwinters y Adfuller.

Se prosigue a la carga del dataset histórico de las manchas solares en extensión .csv segmentado previamente en la parte proporcional de entrenamiento y la de pruebas como se describió anteriormente.

Posteriormente se procede a realizar una descomposición estacional y de tendencia para conocer las características y adaptar el sistema.

Se desfasa la serie temporal comenzando con la sustracción de la línea de mejor ajuste de la serie temporal mediante la resta del componente de tendencia obtenido de la descomposición de la serie temporal, posteriormente se resta la media y se aplica el filtro Baxter-King [35] para eliminar las líneas de tendencia de la media móvil (q) cargando los valores $p = 0, q = 0, d = 0$.

Posteriormente se procede a realizar la prueba ADF descrita anteriormente y revisar en las estadísticas si es un valor mayor a 0.05 para ser cargado en p al ser estacionaria la serie; o en su contrario proceder a convertir en estacionaria la serie.

En caso de no ser estacionaria se utilizará la técnica de diferenciación cargando la variable de en cada intento, tomar el log de la serie y la raíz enésima de la serie en caso de no lograr diferenciarse; como se describió anteriormente.

En caso de si ser estacionaria se aplicarán tests de estacionalidad de la serie temporal ACF para (q) y PACF (p); como se describió anteriormente. En caso de no contar con estacionalidad en alguna variable se volverá a la técnica de estacionalización.

Se actualizarán los valores p, d y q del modelo ARIMA(20)[17].

Se procederá a realizar un entrenamiento por suavizado exponencial Holt-Winters[36] con tendencia y componente estacional aditivo con constante estacional multiplicativa; como se describió anteriormente.

Deberá existir un decremento en el nuevo valor de RSS2; de lo contrario se volverá a realizar pruebas de estacionalidad.

Si es correcto todo lo anterior se procede a realizar la predicción y sus gráficas.

En cada módulo se procede a la generación de estadísticas.

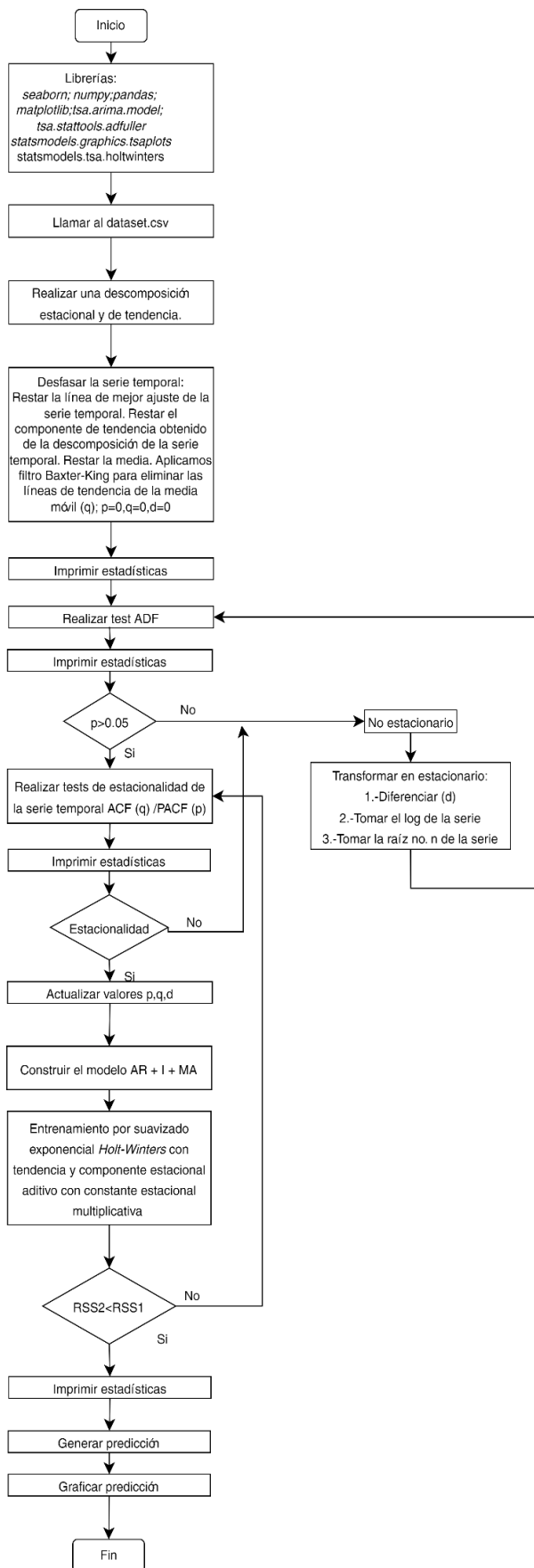


Fig 3. Algoritmo de predictibilidad de manchas solares basado en machine learning mediante estacionalidad en series de tiempo ARIMA.

VI. PROGRAMACIÓN DEL ALGORITMO DE PREDICTIBILIDAD DE MANCHAS SOLARES BASADO EN MACHINE LEARNING MEDIANTE ESTACIONALIDAD EN SERIES DE TIEMPO ARIMA .

Utilizando el modelo[17] (20) y el algoritmo descrito en la figura 3 se programó un código en Python mediante el IDE *Spyder* haciendo uso de las librerías de machine learning y ciencias de datos *matplotlib.pyplot*, *pandas*, *adfuller*, *autocorrelation_plot*, *plot_pacf*, *plot_acf*, *rcParams*, *matplotlib.pyplot*, y *arima.model*.

Se procedió a dibujar la serie de tiempo original y sin tendencia; como se muestra en la figura 4; coincidiendo con la estructura de la figura 2 del *World Data Center WDC-SILSO Royal Observatory of Belgium*[28].

Se procedió a realizar la *correlación parcial (PACF)*[17] mediante *plot_pacf* y la autocorrelación (ACF)[17] como se muestra en la figura 5.

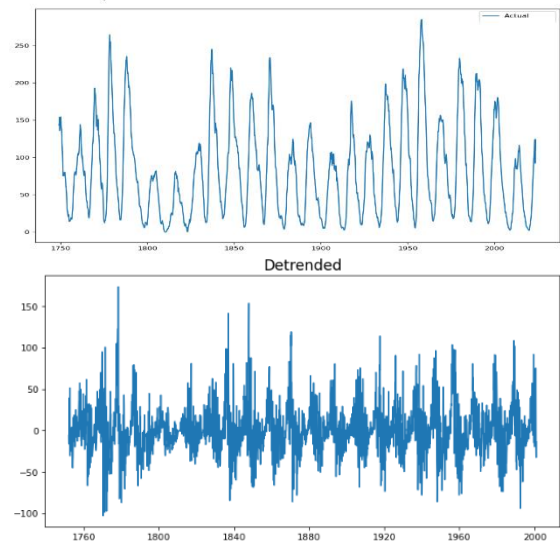


Fig 4. Serie de tiempo utilizando los datos actuales del World Data Center WDC-SILSO original y sin tendencia.

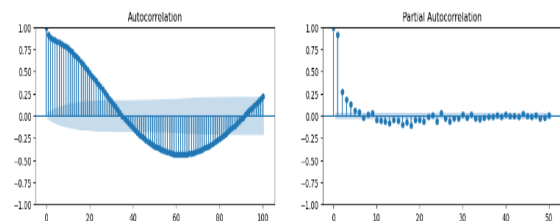


Fig 5 ACF y PACF.

Posteriormente se graficó la primera diferenciación y segunda para localizar a d; como se muestra en las figura 6 y un diagrama de tendencia y de caja (*boxplot*) para localizar valores atípicos y sus distribuciones, cuartiles, mediana y rango intercuartil (*RIC*)[19], como se muestra en la figura 7.

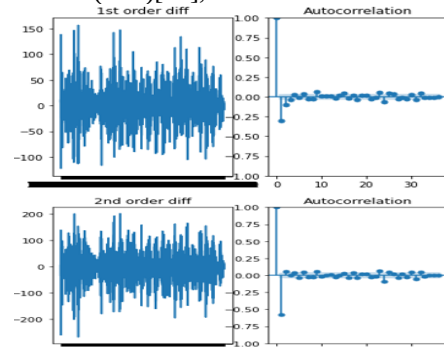


Fig. 6. 1era y 2da diferenciación con autocorrelación

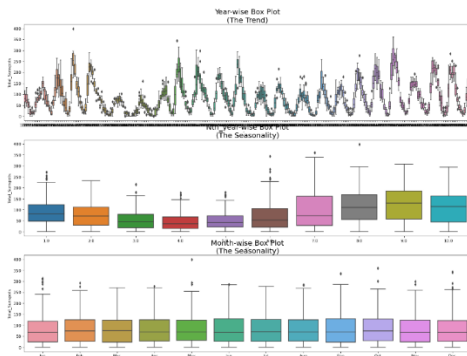


Fig. 7. Tendencia y Estacionalidad

Continuando con el algoritmo se realizó una descomposición multiplicativa para obtener tendencia y estacionalidad, como se muestra en la figura 8.

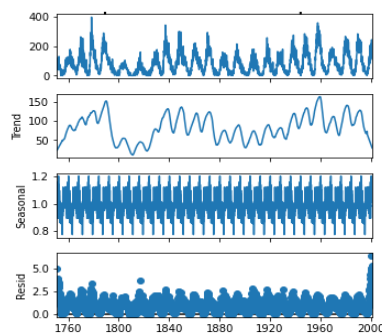


Fig. 8. Descomposición multiplicativa

Posteriormente se realizó la prueba *Adfuller* (*ADF*) [26] en la serie original. Se procedió a realizar la técnica exponencial del arreglo y entrenamiento mediante *Holt Winters*[36], como se muestra en la figura 9.

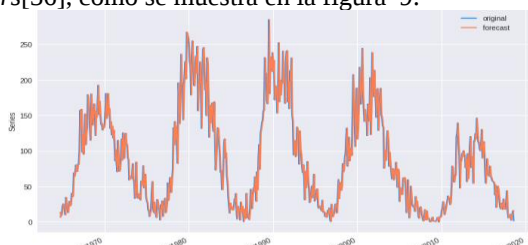


Fig. 9. Entrenamiento machine learning mediante Holt Winters.

Encontrados los valores p, q, d se realizó el ajuste al modelo *ARIMA*[17] (20) para generar una predicción de valores futuros hasta el 2060 utilizando un *DataFrame* con los valores predichos y sus intervalos de confianza y su gráfica, como se muestra en la figura 10.

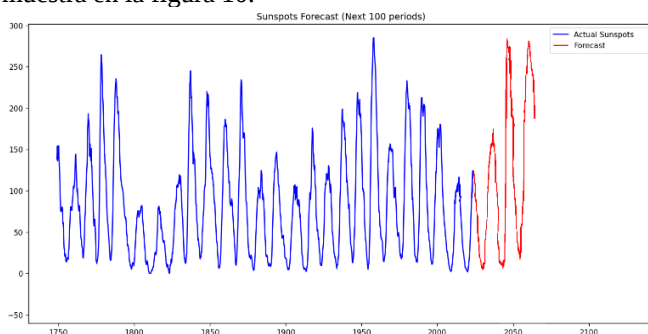


Fig. 10. Predicción al 2060

VII. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

La series de tiempo y algoritmos de predictibilidad, si bien pueden contar con sustento matemático y aparentemente permiten calcular eventos futuros, el aplicarlo a fenómenos no comprendidos en su totalidad como es el caso del sol debido a la falta de capacidad de medir datos externos y sobre todos internos del mismo debido a la distancia y las condiciones atmosféricas adversas que implicaría realizarlo, permite solamente teorizar su comportamiento siendo sólo una mera aproximación hipotética.

Se debe ser humilde en el aspecto científico de poder realizar el pronóstico de un fenómeno no comprendido en su totalidad y sin los instrumentos actuales para poder observar la naturaleza interna del mismo; así mismo la falta de datos para poder generalizar un fenómeno solamente nos llevaría a propuestas parciales que no generalizan el comportamiento del fenómeno y sólo de un intervalo pequeño e insignificante como viene siendo el de apenas 263 años estadísticos puedan indicar el comportamiento de un astro de 4.5 mil millones de años.

Desde el punto de vista optimista matemático el uso del modelo *ARIMA* [17] (20) los resultados obtenidos esperan un máximo de 281 manchas solares para noviembre de 2060.

El uso del algoritmo anteriormente descrito mediante las distintas técnicas automatizadas como *ADF*[26] las múltiples iteraciones en *Holt Winters*[36], los *boxplots* automatizados, *RIC*[19], permitieron realizar una predicción *ARIMA*[17] más precisa; sin embargo es hasta la iteración 48 de sus componentes en el algoritmo *ARIMA*[17] en donde la serie se comenzó a comportar, siendo la 215 la presentada que sigue sin tener una suavidad con respecto al histórico de la serie por lo que técnicas de suavizado podrían mejorar en iteraciones siguientes; sin embargo los tiempos de cómputo en el ajuste es excesivo y se podría realizar en servidores online con mayor capacidad de procesamiento para obtener resultados en menos tiempo.

Existe poca bibliografía respecto al análisis matemático y demostración del modelo *ARIMA*[17] como la que se abordó en la propuesta del presente artículo y sus continuas combinaciones, ya que los trabajos se centran en su aplicación y uso como simples comandos sin profundizar en su algoritmo; lo mismo sucede con el caso de *ADF*[26], *Baxter-King* [35] y *Holt Winters*[36]; por lo que su estudio deber ser de interés para comprender y lograr ajustes en los códigos de *Python*, ya que sin haber modificado éstos en la librerías incorporadas el sistema no hubiera precedido como una serie de tiempo y simplemente hubiera generado una pendiente de estimación.

El modelamiento de todos los modelos anteriores requeriría un trabajo más extenso y el presente trabajo se centró en *ARIMA* y el uso de los filtros sólo en la programación ajustándolos de acuerdo con los valores del modelo(20) matemático analizado.

REFERENCIAS

- [1] Schüssler, M. & Wolfgang, S. (1994). U.K: *Solar Magnetic Fields*. Cambridge University Press.
- [2] Meadows, P. (2021) *The Greatest Sunspot Groups*. USA: Peter Meadows.
- [3] <https://www.weather.gov/fsd/sunspots> Consultado el 1 de agosto de 2023
- [4] Mitchell, M. (1916) *The History Of The Discovery Of The Solar Spots*. USA: Popular Astronomy. Vol XXIV.

- [5] Hathaway, D. H., Wilson, R. M., & Reichmann, E. J. (1999). *A synthesis of solar cycle prediction techniques*. USA: Journal of Geophysical Research. Space Physics.
- [6] Dobler, S.P. (2018) *Solar History: The Connection of Solar Activity, War, Peace and the Human Mind in the 2nd Millennium*. USA: Sacha Dobler.
- [7] Dobler, S.P. (2020) *Solar Behavior: How Solar- and Geomagnetic Conditions shape Human History, the current Self- Destruction Attempt of the West and the new Golden Age*. USA: Sacha Dobler.
- [8] Haigh, J. (2007). *The Sun and the Earth's Climate*. USA: Living Reviews in Solar Physics. 4.
- [9] Brody, J. (2002) *The Enigma of Sunspots*. USA: Floris Books.
- [10] Birkhoff, G.D. (1931) *Proof of the ergodic theorem*. USA: Proc. Natl. Acad. Sci.. Vol. 17. 12. pp. 656–660.USA. DOI:10.1073/pnas.17.12.656
- [11] Birkhoff, G.D. (1942) *What is the ergodic theorem?*. USA: Amer. Math. Monthly. Vol. 49. 4. pp. 222–226.USA. DOI:10.2307/2303229.
- [12] Fréchet, M. S. (1915) *l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*. Francia: Bulletin de la Société Mathématique de France. 43. pp. 248-265. DOI: 10.24033/bsmf.959.
- [13] Bhatia, N.P. & Szegő, G.P. (1970) *Stability Theory of Dynamical Systems Series*. Alemania: Springer. Berlin.
- [14] Agos, R. & R. Wright. (2003) *Dynamics, Cycles, and Sunspot Equilibria in Genuinely Dynamic, Fundamentally Disaggregative Models of Money*. USA: Journal of Economic Theory. 109- pp. 156–171.
- [15] Benhabib, J. & K. Nishimura.. (1979) *The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth*. USA: Journal of Economic Theory. 21. pp. 421–444.
- [16] O'Brien, J. (2003) *Sistemas de información gerencial*. Cuarta Edición. Colombia: McGraw Hill.
- [17] G.E.P., Box, G.M., Jenkins. (1970) *Time Series Analysis: Forecasting and Control. Holden-Day series in time series analysis and digital processing*. USA: Holden-Day.
- [18] Nugus, S. (2009) *CIMA Professional Handbook, Financial Planning Using Excel* (Second Edition). USA: CIMA Publishing. p.9
- [19] Rao, S.S. (2022). *A course in Time Series Analysis*. USA: Texas A&M University. p. 12.
- [20] Brockwell, P. & Davis, R. (1998) *Time Series: Theory and Methods*. USA: Springer..
- [21] Douc, R., Moulines, E. & Stoffer, D. (2014) *Nonlinear Time Series: Theory, Methods and Applications with R Examples*. USA: Chapman and Hall.
- [22] Granville, W. T., Reale, M. & Haywood, J. (2020) *Models for dependent time series*. USA: Chapman and Hall/CRS Press.
- [23] Brillinger, D.R. (2001) *Time Series: Data Analysis and Theory*. USA: SIAM Classics.
- [24] Wold, H. (1954) *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*. Second revised edition. USA: Almqvist and Wiksell Book Co.
- [25] Mincer, J.A. & Zarnowitz, V. (1969) *Economic Forecasts and Expectations: Analysis of Forecasting Behavior and Performance*. USA: NBER. p.8.
- [26] Dickey, D. & Fuller, W. (1979) *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root*. USA: JASA. Journal of the American Statistical Association.
- [27] Hulst, R. P. (2011) *A Proof of Bézout's Theorem Using the Euclidean Algorithm*. Neatherlands: Mathematisch Instituut. Universiteit Leiden.
- [28] <https://www.sidc.be/SILSO/INFO/> consultado el 1ero de octubre de 2023.
- [29] Samuel, A. L. (1959) *Some studies in machine learning using the game of checkers*. USA: IBM Journal of research and development. 10. p. 10. USA.
- [30] Mitchell, T. (1997) *Machine Learning*. USA: McGraw Hill. p.1.
- [31] Fajardo-Rendón, M. (2022) *Diseño de un modelo de regresión de onda pura sinusoidal para inversor eléctrico mediante machine learning*. México: Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos. 7. julio-diciembre 2022.
- [32] Osuna, E., Freund, R., & Girosi, F. (1997) *Support vector machines: training and applications*. AI Memo 1602. USA: MIT Press.
- [33] Rosenblatt, F. (1958) *The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain*. USA: Psychological Review. 65 (6). 386-408.
- [34] Bernard Widrow & Marcian E. Hoff. (1960) *Adaptive switching circuits*. Ire Wescon Convention Record. New York: IRE. pp. 96-104.
- [35] Baxter, M. & King, R.G. (1995) *Measuring Business Cycles Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*. Working Paper Series. 5022. USA: National Bureau of Economic Research.
- [36] Winters, P. R. (1960). *Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages*. USA: Management Science. 6.3.

Propuestas matemáticas para economía, educación y seguridad ciudadana: Enfoque global.

Fernando Gustavo Isa Massa

Universidad tecnológica nacional – facultad regional Tucumán
San miguel de Tucumán – Tucumán, Argentina
ferim74@yahoo.com.ar

Resumen- Los tiempos modernos traen nuevos desafíos y estos se solucionan y encuentran explicación desde la ciencia. Es un requisito de los estados darle la atención primaria a la educación de ciencia y tecnología. En el presente artículo se deducen tres modelos matemáticos originales uno es una abstracción del largo de cola, otro es una derivación de la binomial negativa y por último un modelo útil cuando se mide la insatisfacción en colas de espera por adelantarse sin permiso. Lo aplico a impuestos, seguridad ciudadana y educación. En impuestos para una conducta no regresiva y justa de los mismos, en seguridad para un nuevo mapa del delito y educación para mantener los estados de empatía. Son modelos nuevos y de amplia aplicación..

Palabras Clave- Teoría de colas y Programación lineal, Binomial negativa, Insatisfacción en colas, Largo cola aumentado.

Abstract- Modern times bring new challenges and these are solved and find explanation from science. It is a requirement of the states to give primary attention to science and technology education. In this article, three original mathematical models are deduced, one is an abstraction of queue length, another is a derivation of the negative binomial, and lastly, a useful model when measuring dissatisfaction in queues due to going ahead without permission. I apply it to taxes, citizen security and education. In taxes for a non-regressive and fair conduct of the same, in security for a new map of crime and education to maintain states of empathy. They are new and widely applied models.

Keywords- Queuing theory and Linear programming, Negative binomial, Queuing dissatisfaction, Increased queue length.

Mathematical Subject Classification: 60K25.

I. INTRODUCCIÓN

La articulación de la investigación operativa como base de solución a problemas como los impuestos, la educación y la seguridad se ve definida y desarrollada con tres modelos de los cuales dos pertenecen a teoría de colas que son el aumento en el largo de cola que es una teoría nueva agregada al léxico de teoría de colas que se refiere a aumentar el factor de tráfico ρ , y probabilidad de insatisfacción en colas que rompe los esquemas de deducción de colas de espera al considerar adelantarse en colas positivo para la economía pero no para las colas humanas y retroceder en cola es el razonamiento opuesto; después se refiere a una derivación de la binomial negativa que tiene múltiples aplicaciones y es también un modelo de probabilidades; siendo el objetivo central de la presente investigación científica agregar dichos modelos para futuras

evaluaciones y análisis. Esto se refleja en la investigación y su demostración teórica y práctica.

Definición de variables:

ρ Es el factor de tráfico que se refleja en el uso del servidor de cola teniendo en cuenta la tasa de llegada λ y la tasa de servicio μ .

L_q es el largo de cola promedio en colas de espera

L_a es el aumento del largo de cola.

II. AUMENTO EN EL LARGO DE COLA

Si $L_q = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$ o largo de [1] entonces el aumento de largo

de cola derivado de esa ecuación es $L_a = \frac{3 \cdot \rho^{2+1/2} \cdot \rho}{(1-\rho)}$ donde se mide el incremento de ρ bajo ciertas circunstancias como una deducción del aumento de λ por un proceso de aumento de la probabilidad Poisson descrito en [2] o una disminución de μ por circunstancias no propicias en un cambio de las reglas del servidor de colas [3].

2.1 -Prueba:

Consideremos un aumento de colas o incremento de la cola a partir de un incremento de ρ

Entonces el largo de cola queda de la siguiente manera

$$\rho = \frac{(\rho + \Delta\rho_1)^2}{(1 - (\rho + \Delta\rho_2))}$$

$\Delta\rho$ y $\Delta\rho_2$ son los incrementos de ρ donde se deduce que solo $\Delta\rho_1$ es aplicable para evitar problemas en el proceso de deducción de teorema que sería tener más de dos variables, además $\Delta\rho_2$ tiene que ser cero por convicción de denominador no negativo.

$$\Delta\rho_1 \rightarrow 0$$

$$\Delta\rho_2 = 0$$

Para valores pequeños de $\Delta\rho_1$, consideramos

$$\Delta\rho_1 \rightarrow d\rho \\ = \frac{(\rho + d\rho)^2}{(1 - \rho)}$$

$$= \frac{\rho^2 + 2 \cdot \rho \cdot d\rho + d\rho^2}{(1-\rho)} \quad (1)$$

El problema tomó un nivel adicional de complejidad en $d\rho^2$
(1). Para ello integramos y sacamos las siguientes conclusiones

$$= \frac{\int \rho^2 + 2 \cdot \rho \cdot d\rho + d\rho^2}{f(1-\rho)} \quad (2)$$

2.2 Corolario

Ahora el gran problema es resolver de $\int (d\rho)^2$
Hagamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} \int (d\rho)^2 &= \int d\rho \cdot d\rho \\ f(x) &= (d\rho)^2 \\ \ln f(x) &= 2 \cdot \ln d\rho \\ \ln d\rho &= \frac{1}{2} \cdot \ln f(x) \\ \int \ln d\rho &= \frac{1}{2} \int \ln f(x) \end{aligned}$$

Considero a constantes iguales entre ellas y anuladas

$$\frac{1}{d\rho} \cdot c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(d\rho)^2} \cdot c, \text{ simplifico los } d\rho$$

Simplifico por conveniencia los c que son iguales al igualar los términos.

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{1}{2} \\ \int (d\rho)^2 &= \int \frac{1}{2} d\rho \end{aligned}$$

$\int (d\rho)^2 = \frac{1}{2} \rho$ la constante es cero por deducción de prueba de derivadas

Volviendo a (2)

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho^2 + 2 \cdot \rho^2 + 1/2 \cdot \rho}{(1-\rho)} \\ &= \frac{3 \cdot \rho^2 + 1/2 \cdot \rho}{(1-\rho)} \quad (3) \end{aligned}$$

Notación Kendall-Lee[4]:

(M/M/1): (FIFO/ ∞ / ∞)

2.3 Corolario

Si el aumento de largo de cola supone un incremento de ρ para ciertos criterios en colas donde ocurre un aumento de λ por un proceso de aumento de la probabilidad Poisson [2]: donde se considera a n grande o mayor a 30 casos en estudio y p pequeña o por convicción menor a 0.1; o una disminución de μ , entonces no podremos encontrar algunos valores de ρ para los cuales el aumento de largo de cola es igual al largo de cola promedio

Prueba:

Igualo los dos modelos a evaluar

$$\frac{3 \cdot \rho^2 + 1/2 \cdot \rho}{(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

Simplifico denominador

$$\begin{aligned} 3 \cdot \rho^2 + 1/2 \cdot \rho &= \rho^2 \\ 3 \cdot \rho^2 + 1/2 \cdot \rho - \rho^2 &= 0 \\ 2 \cdot \rho^2 + 1/2 \cdot \rho &= 0 \\ \rho \cdot (2 \cdot \rho + 1/2) &= 0 \end{aligned}$$

Para lo cual se deduce dos soluciones

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \rho &= -1/4 \end{aligned}$$

La segunda solución no corresponde al ser negativa

2.4 Conclusión

No pueden ser los dos modelos compatibles, entonces cabría esperar que el aumento de largo de cola es un modelo de un análisis solo en circunstancias de aumento de ρ

2.5 Objeto del modelo

Solo es aplicable para cambios de valor de ρ las circunstancias de su aumento por incremento en probabilidad de Poisson [2]: o disminución de μ ; como se

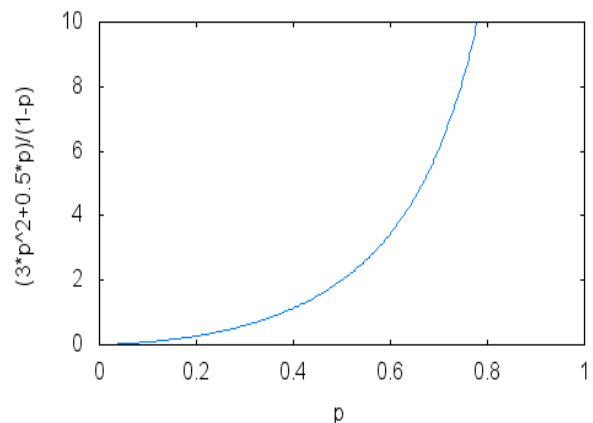


Fig. 1 Largo cola aumentado

III. PROBABILIDAD DE ÉXITO CON N INTENTOS, DERIVACIÓN DE BINOMIAL NEGATIVA

Definición:

$C_{(n-1,x-1)}$ es la combinatoria

Teorema:

Si $P_{(n=m)} = C_{(n-1,x-1)} \cdot p^x \cdot q^{(n-x)}$ es la binomial negativa, entonces una derivación de ella y que es probabilidad de acierto sin p es: $P_e = 1 - \frac{q^n}{n}$, para valores donde considero la cantidad de éxitos como nula, por ser un modelo donde se prescinde por su demostración la probabilidad de éxitos p quedando como conclusión una nueva probabilidad de éxito.

3.1 Prueba:

La binomial negativa o (Pascal - Polya), descrito en [5]: tiene el siguiente modelo de probabilidad

$$P_{(n=m)} = C_{(n-1, x-1)} \cdot p^x \cdot q^{(n-x)}$$

$$P_{(n=m)} = \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} \cdot p^x \cdot q^{(n-x)}$$

p : probabilidad de éxito

q : probabilidad de fallo

x : cantidad éxitos

n : cantidad de intentos

La cantidad de éxitos denotada por la variable x , la defino en 0:

$$P_{(n=m)} = \frac{(n-1)!}{(n-0)!(0-1)!} \cdot p^0 \cdot q^{(n-0)}$$

$$P_{(n=m)} = - \frac{(n-1)!}{(n) \cdot (n-1)!} \cdot q^n$$

$$= - \frac{q^n}{n}$$

La circunstancia que acontece a una probabilidad negativa[5] refiere a un complemento de probabilidades, entonces para que ese complemento sugiera una probabilidad; suma uno a la ecuación.

$$= 1 - \frac{q^n}{n}$$

Este modelo representa la probabilidad de éxito en n intentos, sin recurrir a una cantidad específica x de éxitos ya que es nula y a p , por lo tanto, es representado por su totalidad de intentos n .

$$P_e = 1 - \frac{q^n}{n} \quad (4)$$

Si $n \rightarrow +\infty$, entonces y el denominador lo consideramos distinto a ∞

$$P_e = 1 - \frac{q^\infty}{n}$$

Una probabilidad elevada a infinito tiende a 0

$$P_e = 1 - \frac{0}{n}$$

De la misma manera al tener un numerador 0 se espera 0 como resultado.

$$P_e = 1$$

Si la cantidad de intentos es alta entonces la probabilidad de éxito es alta. Si $n \rightarrow 0$, entonces:

$$P_e = 1 - \frac{q^0}{0}$$

$$P_e = \infty$$

Por lo tanto $n \neq 0$

Entonces tenemos como cota inferior $n=1$

$$P_e = 1 - \frac{q^1}{1}$$

$$P_e = 1 - q$$

Si $q \rightarrow 1$, entonces

$$P_e = 1 - \frac{1^n}{n}$$

$$P_e = 1 - \frac{1}{n}$$

A probabilidades altas de fracaso se tiende la probabilidad de éxito a $1 - \frac{1}{n}$

Si $q \rightarrow 0$, entonces

$$P_e = 1 - \frac{0^n}{n} = 1 \quad [3]$$

Encontramos la mayor probabilidad de éxito cuando el fracaso es 0

$$0 \leq P_e \leq 1$$

$$0 \leq q \leq 1$$

$$1 \leq n < +\infty$$

3.2 Corolario

Los n intentos salen por convención de la definición discreta de la binomial negativa y sus valores varían entre

$$0 < n \leq 1$$

3.3 Corolario

La distancia Euclidiana entre q y n [6] se da para valores de $n > q$, entonces la probabilidad varía entre 0 y 1[7]:

3.4 Corolario

Para valores de $n = q$ ocurre lo siguiente:

$$P_e = 1 - \frac{n^n}{n}$$

$$P_e = 1 - n^{n-1}$$

3.5 Corolario

Veamos analíticamente entre que valores pueden variar n y q [3]:

$$0 \leq 1 - \frac{q^n}{n}$$

$$\frac{q^n}{n} \leq 1$$

$$q^n \leq n$$

$$\ln q^n \leq \ln n$$

$$N \cdot \ln q \leq \ln n$$

$$Q \leq e^{(\ln n)/n}$$

3.6 Media de probabilidad de fallo con n intentos

La media $\mu = n \cdot q$

3.6.1 Prueba:

Desde la j -ésima prueba mediante la variable aleatoria de Bernoulli[8] I_j , que toma los valores 0 y 1 con probabilidades q y p . El número de fallos se mide como la suma de n variables independiente mediante:

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

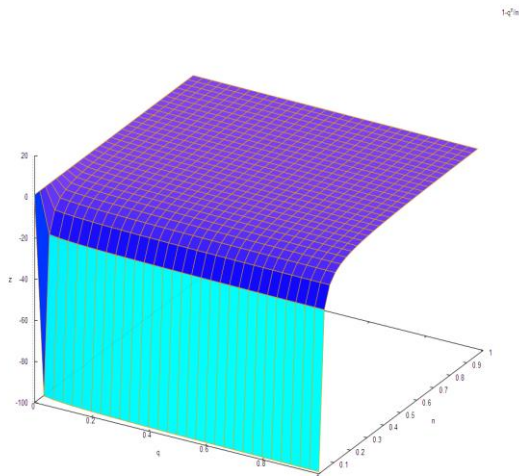


Fig. 2 Probabilidad de éxito con n intentos

La media de cualquier I_j es $E(I_j) = (0) \cdot (p) + (1) \cdot (q) = q$: al considerar la cantidad de éxitos como nula por demostración de probabilidad de fallo con n intentos, entonces podemos considerar valor cero productos con la probabilidad de éxitos p y valor 1 producto de la probabilidad de fracaso q.

La media de la distribución binomial[3]:

$$\mu = E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n) = q + q + \dots + q = n \cdot q$$

Ya que sabemos: $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Donde $E(X)$ es la esperanza de X

Con lo que se demuestra la media.

3.7 Conclusión:

La probabilidad de éxito con n intentos la podemos considerar para ciertas condiciones como que no tengamos cantidad de éxitos y probabilidad de éxito p, entonces por demostración la probabilidad de éxito no forma parte del modelo, lo que es razonable y el modelo queda con las variables q que es probabilidad de fracasos y n que es la cantidad de intentos.

3.8 Objeto

Se usa para probabilidades donde no se conozca la probabilidad de éxito ni la cantidad de éxitos, y contemos con la información de la probabilidad de fracaso y el total de intentos. Su media también se diferencia de la media de la binomial negativa. Hereda de la misma el análisis para n pequeño.

IV. PROBABILIDAD DE INSATISFACCIÓN O MAL HUMOR EN COLAS

Teorema: Si tenemos x personas que se adelantan o retroceden en la cola, entonces encontramos la probabilidad según sea de adelantarse o atrasarse, la probabilidad de insatisfacción o mal humor en colas se manifiestan teniendo en cuenta una cantidad de los que se adelantan o retroceden sobre

el total que puede hacerlo en una combinatoria tomados de a 2; es:

$$P_i = 1 - \frac{\frac{2 \cdot x - 1}{L_q \cdot (L_q - 1)} - 1}{2}$$

4.1 Prueba:

Dada una probabilidad Laplaciana[4]: que mide casos favorables sobre casos posibles entre los que se adelantan o retroceden de cola sobre su combinación, entendemos lo siguiente: X es la cantidad de personas que se adelantan o retroceden, esto teniendo en cuenta para el analista que esto causa insatisfacción o mal humor en los otros integrantes de la cola cuando hablamos de adelantarse en colas humanas o cuando hablamos de atrasos en crédito o impuestos; $2 \cdot X$ [3] es hacer los movimientos de cola en ambas direcciones, entonces x se adelanta x retroceden en la misma operación (uno se adelanta el que estaba adelante retrocede); por lo tanto queda representado por: $2 \cdot x$ [2]. Esta abstracción representa en el numerador los casos favorables que es que se adelante y retroceda en la cola.

La combinatoria de atrasarse o adelantarse de a dos que son los casos es:

$$\begin{aligned} C(n, x) &= \frac{n!}{(n-x)! x!} \\ C(n, 2) &= \frac{n!}{(n-2)! 2!} \\ C(n, 2) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! 2!} \\ C(n, 2) &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \quad [3] \end{aligned}$$

Que son las combinaciones posibles de adelantar o retroceder en cola donde intervienen dos personas una que se adelanta y la otra que queda atrás. Lo mismo pasa para una que se atrasa y la otra se queda adelante. La probabilidad de Laplace, casos favorables sobre casos posibles[4].

$$P_i = \frac{2 \cdot x}{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$$

Entendemos que en una cola[2]; donde $2 \cdot x$ es la cantidad que se adelanta o retrocede; que el primero de cola no se involucra al tener una posición de privilegio en la cola. Entonces resto 1 al numerador y para que no cambie la ecuación, también resto 1 al denominador

$$P_i = \frac{2 \cdot x - 1}{\frac{n \cdot (n-1)}{2} - 1}$$

También a fines teóricos n que es la cantidad de cola, lo consideramos como L_q

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{2 \cdot x - 1}{\frac{L_q \cdot (L_q - 1)}{2} - 1} \\ P_i &= 1 - \frac{2 \cdot x - 1}{\frac{L_q \cdot (L_q - 1)}{2} - 1} \quad (5) \end{aligned}$$

Donde P_i es la probabilidad de insatisfacción que se da cuando me retraso en el pago de impuestos o créditos y en colas humanas al adelantarme el lugar.

4.2 Corolario

P_s Es la probabilidad de satisfacción que ocurre cuando se nos atrasan en colas humanas dejándonos el lugar, o adelantos en pagos de crédito o impuestos.

$$P_s = \frac{2 \cdot x - 1}{\frac{L_q \cdot (L_q - 1)}{2} - 1} \quad (6)$$

Si considero a $x=0$, entonces $L_q=0$

$$\begin{aligned} P_i &= 1 - \frac{0 - 1}{\frac{0(0 - 1)}{2} - 1} \\ &= 1 - \frac{-1}{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con pocos que se adelantan la insatisfacción del sistema tiende a cero.

Lo próximo a evaluar es cuando los que se adelantan o atrasan tienden a un número grande o infinito $x \rightarrow \infty$

Entonces se deduce que $L_q \rightarrow \infty$:

$$P_i = 1 - \frac{\infty - 1}{\frac{\infty(\infty - 1)}{2} - 1}$$

Aplico L'Hopital,[1] al haber una indeterminación y derivó numerador y denominador.

En el denominador reemplazo L_q por

$$L_q = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)}$$

De esa forma la derivada del denominador me da un número tiende a infinito

$$\begin{aligned} P_i &= 1 - \frac{2}{\frac{\infty(\infty - 1)}{2}} \\ &= 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando existen muchos por adelantarse o atrasarse la probabilidad de insatisfacción tiende a la certeza o 1.

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_i \leq 1 \\ 0 &\leq x < +\infty \\ 0 &\leq L_q < +\infty \\ 0 &\leq P_s \leq 1 \end{aligned}$$

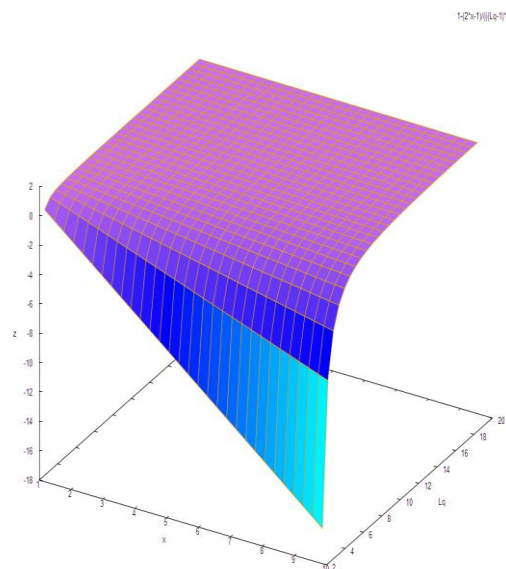


Fig.3. Probabilidad de insatisfacción o de mal humor en colas

4.3 Conclusión

La insatisfacción que mide la probabilidad de mal humor por adelantarse o colarse como el lunfardo es en colas humanas, pero no es lo mismo para crédito o impuestos, ya que pagar adelantado es beneficioso para el que cobra. Sin embargo, esto no siempre es así, en beneficios como la moratoria retrasarse en colas por incumplimientos es insatisfacción para PYMES (Pequeñas y Grandes Empresas) y población en general. Y en colas humanas, podemos esperar que dar el lugar o retroceder es un acto de solidaridad, lo contrario de adelantarse que es un acto desleal.

4.4 Objeto

Un objeto[4] mide la probabilidad; en éste caso de insatisfacción o mal humor en colas humanas u otras, donde se puede apreciar como resultado de conductas como adelantarse sobre un total de combinatoria de esas operaciones tomadas de a dos personas. Su objetivo principal es mejorar el humor con medidas para evitar altas probabilidades. La probabilidad de insatisfacción es el complemento de la probabilidad de satisfacción y sus conclusiones son diametralmente opuestas.

V. SOLUCIONES PRÁCTICAS.

5.1 I.VA (Impuesto al valor agregado)

El impuesto al valor agregado (IVA), es un impuesto regresivo; entendiéndose como ello a los impuestos que desfavorecen a los pobres y clase media. Este impuesto es al consumo, y los pobres y clase media, como en la mayoría de las situaciones, no tienen capacidad de ahorro por lo tanto consumen todas sus ganancias y estas van al IVA. Entonces los que más pagan suelen ser los más desfavorecidos por el sistema.

Si el estado tiene que afrontar sus obligaciones con los ciudadanos, recurre a cuatro formas de entradas de dinero:

- Impuestos
- Emisión monetaria
- Pedir crédito internacional y nacional
- Ajustes en las cuentas públicas

Dado que se cree en el léxico económico que solo se puede subir los impuestos para obtener mayores recaudaciones, demostramos que este criterio no siempre es cierto; debido a que una baja de impuestos genera mayores recaudaciones por la evasión que se recupera y el aumento del consumo por haber productos más baratos y bajos de la inflación. Planteemos la siguiente hipótesis.

5.1.1 Hipótesis

Si bajamos algunos puntos del impuesto IVA, entonces el aumento del largo de cola que sugiere los clientes que adeudan el mismo bajaran y la probabilidad de éxito en n intentos subirá con los evasores que pagaran en el sistema

Prueba:

Sabemos que la evasión de dicho impuesto tiene un 30% o 35% de evasores, que lo tomamos como el factor de tráfico ρ , entonces debemos demostrar que bajando este el aumento del largo de cola también bajara (sugiere evasores en cola). Por (3) sabemos:

$$L_a = \frac{3 \cdot \rho^2 + 1/2 \cdot \rho}{(1-\rho)}$$

$$= \frac{3 \cdot (0.3^2) + 1/2 \cdot (0.3)}{(1-0.3)} = 0.6$$

Si bajando varios puntos del 21% del impuesto logramos una reducción de los evasores, podemos considerar una baja en el aumento del largo de cola. Supongamos bajar 40% de evasión:

$$\rho = 0.18.$$

$$= \frac{3 \cdot (0.18^2) + 1/2 \cdot 0.18}{(1-0.18)}$$

$$= 0.228$$

Podemos suponer que el modelo sigue a una probabilidad Poisson [2]; tal aseveración es producto de considerar a una probabilidad de éxito p pequeña y menor a 0,1 y una n grande o mayor a 30. A fines prácticos, será muy difícil probar que se sigue a una probabilidad Poisson [2] con la chi cuadrado dado el alto sesgo que se considera en el punto en cuestión.

Con lo que el aumento del largo de cola disminuye al disminuir ρ y podemos concluir la primera parte de la hipótesis que bajar unos puntos del impuesto genera menor evasión y por lo tanto menor cantidad de morosos en cola. Por la curva de Laffer[9], que fue un economista que uso la campana de Gauss para demostrar que una suba de impuesto lograba una suba en el mercado negro y una mayor evasión. El presente trabajo demuestra, con métodos propios, algo parecido.

La segunda parte de la hipótesis la demostramos con la probabilidad de éxitos con n intentos, de (4) sabemos

$$P_e = 1 - \frac{q^n}{n}$$

Consideramos una evasión del 0,3 por y n igual a una tasa de 0,4 intentos ($n=1-0,4$).

$$P_e = 1 - \frac{0.3^{0.6}}{0.6}$$

$$P_e = 0.19067$$

Tenemos una probabilidad de éxito con n intentos de 19.067%.

Ahora bien, partamos de una baja del impuesto en algunos puntos con lo que se obtiene una menor evasión. La reducción de la evasión por fines prácticos la podríamos considerar en un 40%

$$q = 0.18$$

Ahora el objetivo es encontrar una n que se ajuste a la nueva q .

Por media de la probabilidad de éxito con n intentos sabemos

$$\text{La media } \mu = n \cdot q.$$

Partamos de una media de 10% de intentos entonces:

$$0.10 = n \cdot (0.18)$$

$$n = 0.10 / 0.18$$

$$n = 0.55$$

Este análisis por la media sirve para encontrar valores desconocidos de n para valores conocidos de la media

Entonces volviendo a (4)

$$P_e = 1 - \frac{0.18^{0.55}}{0.55}$$

$$P_e = 0.29199$$

Por lo tanto, una baja en la evasión genera una suba en la probabilidad de éxito con n intentos que representa los evasores cada n casos

$$0.19067 < 0.29199$$

Si bien no se redujo mucho, esto es debido a que también se redujo n lo que trae una menor probabilidad (Ver demostración)

5.2 Probabilidad de insatisfacción en alumnos del curso por desaprobados

Los procesos educativos traen como consecuencias insatisfacciones en los alumnos por compañeros que no siguen el próximo año o no aprueban la materia. Para ello uso el modelo matemático que enuncié.

$$P_i = 1 - \frac{2 \cdot x - 1}{\frac{L_q \cdot (L_q - 1)}{2} - 1}$$

Tabla 1. Promedio para calcular si hubo insatisfacción

Año	2019 (virtual)	2020 (dos modalidades)
Promedio	6.64	7.7

En el 2019 cuatro alumnos no aprobaron la materia que serían los que se atrasan en la cola del modelo.

$$P_i = 1 - \frac{2 \cdot 4 - 1}{\frac{11 \cdot (11 - 1)}{2} - 1} = 0.87037$$

Siendo $L_q = 11$, o la cantidad total de alumnos. La probabilidad de 0.87037 concluye una alta probabilidad de insatisfacción, sabiendo que casi la mitad del curso desaprobó al final del año la materia. Por lo tanto, existe ese

inconformismo en los alumnos por la situación de sus compañeros.

5.3 Probabilidad de insatisfacción.

5.3.1 Aplicación de moratoria impositiva.

La moratoria en el contexto económico actual es aceptable por la falta de acceso al financiamiento y la caída en las ventas de productos y servicios. Pero no todas las moratorias son justas, quizás se comprendan en las *PYMES* y no en las grandes empresas que, si pueden pagar, caso contrario se dejaría de recaudar para obra pública y brindar servicios públicos. En la siguiente investigación demuestro la insatisfacción por moratoria a grandes empresas y no por moratoria a pequeñas empresas.

La insatisfacción por adelantarse en colas es distinta en colas humanas donde es una actitud desleal y no en economía donde adelantarse es pagar adelantado el crédito y el impuesto, y atrasarse en colas es aceptada en colas humanas, pero en economía es dejar de pagar un crédito o impuesto.

El adelantarse en cola de espera para colocarse inyección para COVID 19 en Argentina concluyó con la renuncia del ministro de salud por la insatisfacción en la sociedad por esa conducta.

Moratoria *PYMES*

Considero 4000 empresas de las cuales 2500 entraron en moratoria.

Tomamos para fines prácticos 4 empresas sobre 2.5 en moratoria

$$P_i = 1 - \frac{2 \cdot x - 1}{Lq \cdot (Lq - 1) - 1} \quad (5)$$

$$P_i = 1 - \frac{2 \cdot (2.5) - 1}{4 \cdot (4 - 1) - 1} = 0.2$$

La probabilidad de insatisfacción para muchas *PYMES* en este modelo es baja.

Moratoria grandes empresas, de 400 grandes empresas entran en moratoria 100

Consideramos para fines prácticos 4 empresas y 1 en moratoria:

$$P_i = 1 - \frac{2 \cdot 1 - 1}{4 \cdot (4 - 1) - 1} = 0.8$$

La probabilidad de insatisfacción en grandes empresas es alto

La conclusión que llegamos es que para este modelo una gran cantidad de empresas como es común en las *PYMES* da poca insatisfacción social y pocas empresas, lo que es común en grandes empresas es con alta insatisfacción. Por lo menos para este modelo se da esos resultados.

5.4 Probabilidad de éxito con n intentos

5.4.1 Sabemos que $P_e = 1 - \frac{q^n}{n}$

Entonces se puede hacer un análisis de programación lineal sobre el problema de la mochila donde se desea saber cuáles de una lista de impuestos tienen que ser considerados por su variación de año a año y alta recaudación e importancia.

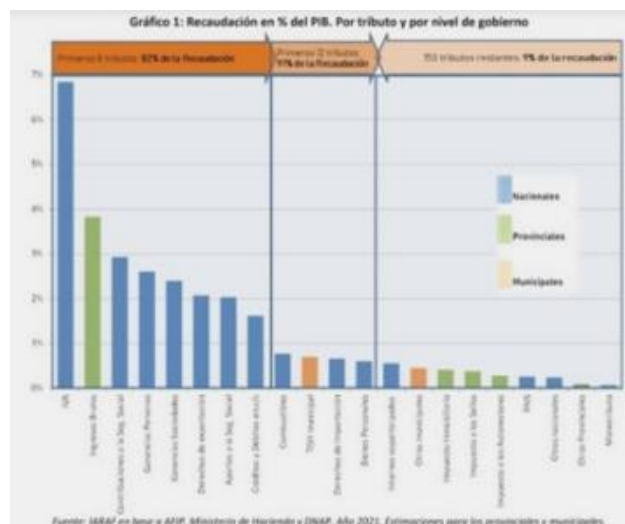


Fig. 4. Impuestos nacionales

Estos importes son los coeficientes económicos. Y la probabilidad de éxito en n intentos son los coeficientes tecnológicos. Los recursos serán la cantidad de impuestos producto con una tolerancia de probabilidad.

En la siguiente tabla resumimos lo planteado en cinco impuestos:

$$P_e = 1 - \frac{q^n}{n}$$

$$N = 1$$

$$P_e = 1 - q[3].$$

Tabla 2. Impuestos por años y diferencias[10]

Impuesto	Enero 2022	Diciembre 2021	Dif % '21 y '22
Ganancias	238000	259000	8.1
Otros coparticipados	2107	2325	9.4
Derecho exportación	68000	83000	18.3
Combustibles	22000	43000	46.8
Bienes personales	5000	32000	83.1

Tabla: [10]

Tomo $n=1$ al ser considerado solo el impuesto analizado Problema de la mochila con esta modelación[11].

$$(2.5) \cdot Gan + (0.5) \cdot Copar + 2 \cdot Export + (0.8) \cdot Comb + (0.5) \cdot BienPers \rightarrow MAX$$

$$(1 - 0.081) \cdot Gan + (1 - 0.094) \cdot Copar + (1 - 0.183) \cdot Export + (1 - 0.468) \cdot Comb + (1 - 0.831) \cdot BienPers \leq 3$$

Los recursos son 3 impuestos que por convención se consideraran aceptables su solución. La mochila solo incluirá como solución a los impuestos con mayor recaudación y que ocupen menos recursos o mayor diferencia de año a año en recaudación. Los mismos tienen que ser objeto de estudio por el organismo del estado correspondiente.

Solución: *Gan, Export, Comb, BienPers* [12]

Los impuestos que son solución deberán replantearse por ser importantes en recaudación y tener una gran diferencia entre diciembre de 2021 y enero 2022.

Los recursos deben analizarse según convención de autoridad.

5.4.2 Estudio de matemáticas predictivas para lucha contra la inseguridad

De un estudio sobre la inseguridad evaluado por provincias, se hace el siguiente análisis para considerar a las provincias más inseguras como prioridad y tomar medidas del caso

Tabla 3. Estados y prevalencia delictiva

Provincia	Prevalencia delictiva %
Buenos Aires	28.8
CABA	33.4
Río Negro	16.6
Córdoba	27.0
Tucumán	37.7

Datos: [13]

Se hace el problema de la mochila con coeficientes económicos la prevalencia y la probabilidad de éxito con n intentos los coeficientes tecnológicos.

$$P_e = 1 - \frac{q^n}{n}$$

N = 1

$P_e = 1 - q$ [13]

Tomo n=1 al ser considerado solo la provincia analizada

Los recursos tomo 3 para una decisión de cantidad de provincias en alerta a ser consideradas por autoridad.

$(28.8) \cdot BsAs + (33.4) \cdot CABA + (16.6) \cdot RioN + 27 \cdot Cord + (37.7) \cdot Tuc \rightarrow MAX$

$(1 - 0.288) \cdot BsAs + (1 - 0.334) \cdot CABA + (1 - 0.166) \cdot RioN + (1 - 0.27) \cdot Cord + (1 - 0.377) \cdot Tuc \leq 3$

Solución: BsAs, CABA, Cord, Tuc

La provincia de Río Negro al tener poca prevalencia delictiva no es solución. En estas provincias solución habrá que poner la mayor cantidad de esfuerzos.

5.4.3 Otra aplicación:

Se hace problema de la mochila, los recursos serán los policías aptos para guardia en calle por horario, los coeficientes económicos una medición de importancia económica de la cuadra (negocios), esto multiplicado por el complemento de la tasa de circulación por calles (calles medianamente circuladas son tentación para delinquentes) y por último, los coeficientes tecnológicos serán la probabilidad Poisson [2], si la probabilidad de robo es baja (la mayoría de las calles) o probabilidad de éxito con n intentos para probabilidad altas

VI. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Respecto a 2.4 cabría esperar que el aumento de largo de cola es un modelo de un análisis solo en circunstancias de aumento de ρ .

En el teorema sección 3 se obtuvo una nueva probabilidad de éxito.

En la sección 5.11 el aumento del largo de cola disminuye al disminuir ρ y la primera parte de la hipótesis indicó que bajar unos puntos del impuesto genera menor evasión y por lo tanto menor cantidad de morosos en cola.

Respecto a 5.2 se obtuvo la probabilidad de insatisfacción de reprobados de 0.87037 ; sabiendo que casi la mitad del curso desaprobó al final del año la materia.

En 5.3.1 se obtuvo que la insatisfacción por adelantarse en colas es distinta en colas humanas donde es una actitud desleal y no en economía donde adelantarse es pagar adelantado el crédito y el impuesto, y atrasarse en colas es aceptada en colas

humanas, pero en economía es dejar de pagar un crédito o impuesto y que una gran cantidad de empresas da poca insatisfacción social.

Las herramientas en la toma de decisiones como se analizó en el presente artículo con tres modelos originales tienen una amplia aplicación en el futuro de los pueblos; siendo una condición más que suficiente para el crecimiento y desarrollo.

AGRADECIMIENTOS

A los árbitros y sus generosas correcciones, Dr Herrera, Marcos Fajardo, a mi familia y amigos, AUS Damián García Pascualini, Ing. Gustavo Carrasco, Dr(c) Arturo López, Dr(c) Adolfo Rodríguez, Prof. María Leonor Gómez Llanos, Ing. Fanny Herrera, Dr ing. Jorge Perera, Luis Sacaba, Ing. Ricardo Adra.

REFERENCIAS

- [1] Bradley, R.E., Petrilli, S.J., Sandifer, C.E.(2015). *L'Hôpital's analyse des infiniments petits (An annotated translation with source material by Johann Bernoulli)*. Alemania: Birkhäuser.
- [2] Feng, S.(2010). *The Poisson-Dirichlet Distribution and Related Topics: Models and Asymptotic Behaviors*. Alemania: Springer. Berlin and Heidelberg.
- [3] Douglas, C., Montgomery, G., C. Runger. *Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería*. México: Limusa Wiley
- [4] Kendall, D. G. (1953) *Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain*. USA: The Annals of Mathematical Statistics. 24 (3).
- [5] Ojima, Y., Yasui, S., Ling, F., Suzuki, T., Harada, T. (2006) *The Probability of the Occurrence of Negative Estimates in the Variance Components Estimation by Nested Precision Experiments*. Lenz, HJ., Wilrich, PT. (eds) *Frontiers in Statistical Quality Control 8*. USA: Physica-Verlag HD.
- [6] Puertas, M.L. (2002) *Elementos de Euclides*. España: Gredos.
- [7] Leithold, L.(1982) *El cálculo con geometría analítica*. México: Editorial Harla.
- [8] Kaneko, M., Ibukiyama, T., & Arakawa, T. (2014) *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*. Japón: Springer Japan. 2014
- [9] Fullerton, D. (2008). *Laffer Curve* The New Palgrave Dictionary of Economics. Londres: Palgrave Macmillan. London.
- [10] <https://www.argentina.gob.ar/economia/ingresospublicos/pormesy tasa> Accedido 24 de septiembre de 2023.
- [11] Walpole, Myers.(2012) *Probabilidad y estadísticas para Ingeniería y ciencias*. USA: Pearson Prentice Hall.
- [12] Ley de impuestos instituto nacional de estadísticas y censos www.indec.gob.ar .Accedido 24 de septiembre de 2023.
- [13] <http://www.seguridadciudadana.org.ar/recursos/articulos/prevalencias-delictivas-en-argentina> .Accedido 24 de septiembre de 2023.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*